Олимпиада «Физтех» по математике

2014 год, вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_{x^2-2x}\left(2-3^{4x-x^2}\right)=\log_{6-x}\left(2-3^{4x-x^2}\right).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{6\cos^2 x+4\sin^2 x-5}+\frac{\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{5-4\cos^2 x-6\sin^2 x}=-\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}2x}{2}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+4y^2+4xy=2x+4y+3, \\ \sqrt{3x+6y}+xy=4. \end{cases}$$

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $BM=3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω. Найдите угол COD, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5y^3=18^{50}\cdot 10^{33}$?

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\operatorname{ctg}x \quad \text{и} \quad g(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{9+8x-x^2}}+\frac{\sqrt{9+8x-x^2}}{2x-3}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. Дана пирамида $ABCD$ и сфера радиуса $\sqrt{3}$. Ребро AC пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ABC, длину ребра BD и объём пирамиды $ABCD$.

Дубов.РФ

Ответы

1. 4, -2.

2. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $(1, 1)$; $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

4. $90°$, 26, $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.

5. 126.

6. $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right) \cup \left\{4, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

7. $45°$, $4\sqrt{3}$, 6.

Ягубов.рф