1.
Целые числа a, b, c и d удовлетворяют равенству a2 + b2 + c2 = d2. Доказать, что число abc делится на 4.

Решение

Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа дает при делении на 4 остаток 1.

Если числа a, b, c — нечетные, то d2 должен давать при делении на 4 остаток 3, что невозможно.

Если среди чисел a, b, c два нечетных и одно четное, то d2 должен давать при делении на 4 остаток 2, что также невозможно.

Значит, среди чисел a, b, c есть два четных числа, откуда произведение abc делится на 4.

Такое возможно, например, 32 + 42 + 122 = 132.
2.
Найдется ли такое натуральное число n, при котором 2n + n2 оканчивается цифрой 5?

Ответ: нет.

Число 2n может оканчиваться одной из цифр 2, 4, 8, 6 (с периодом 4), а число n2 — одной из цифр: 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 (с периодом 10). Отсюда число 2n + n2 будет оканчиваться на 5, если 2n оканчивается на 4 или на 6, то есть когда число n — четно, но тогда 2n + n2 — четно, значит, не может оканчиваться на цифру 5.

3.
Решить уравнение в целых числах:
(x – y)3 + (y – z)3 + (z – x)3 = 30.

Преобразовав данное уравнение, получим:

3(x – y)(y – z)(z – x) = 30 или (x – y)(y – z)(z – x) = 10.

Значит, целые числа (x – y), (y – z), (z – x) — делители числа 10, сумма этих делителей равна нулю. Не трудно убедиться, что таких делителей у числа 10 нет.

4.
В выпуклом четырехугольнике ABCD выполняется AB + BD < AC + CD. Докажите неравенство AB < AC.

Пусть точка O — пересечение диагоналей AC и BD. По неравенству треугольника AO + BO > AB, OC + OD > CD, откуда

(AO + OC) + (BO + OD) > AB + CD,

или (после преобразований) AB + CD < AC + BD. Сложив это неравенство с данным в условии, получим: 2AB + BD + CD < 2AC + CD + BD, откуда AB < AC.
5.
Вычислительное устройство вычитает из каждого трехзначного числа сумму кубов его цифр. Какое число нужно ввести в устройство, чтобы результат оказался максимальным?

Ответ: 620 или 621.

Пусть ввели некоторое трехзначное число . Тогда устройство выдаст число

(100a + 10b + c) – (a3 + b3 + c3) = a(100 – a2) + b(10 – b2) + c(1 – c2).

Результат будет наибольшим тогда и только тогда, когда каждое слагаемое максимально, то есть при a = 6, b = 2, c = 0 или c = 1.

6.

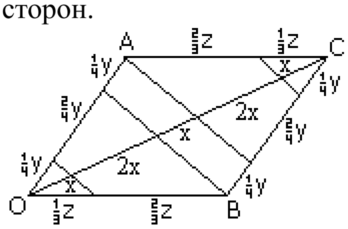
Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2000 месте?

Вычислим несколько первых членов последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; … — число 5 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 3: числа 5; 8; 11 далее будут повторяться. На пятом месте — пятерка, тогда для любого k > 0 на (3k + 2)-м месте также будет пятерка.

Так как 2000 = 3 × 666 + 2, то 2000-м месте стоит число 5.

7. Дан параллелограмм OACB. Проведена прямая, отсекающая четверть стороны OA и треть стороны OB, считая от вершины O. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали OC?

Пусть OA = y, OC = x, OB = z. Проведем прямые, параллельные уже проведенной: через точки B, A, а также прямую, параллельную данной и отсекающие такие же отрезки, как в условии, от противоположных сторон.



Используя теорему Фалеса, несложно доказать, что эти прямые (вместе с данной) разбивают диагональ на отрезки x, 2x, x, 2x, x (начиная от вершины O). Отсюда x = OC / 7.

8. **Решите в натуральных числах уравнение zx + 1 = (z + 1)2.**

При x = 1 или z = 1 уравнение решений не имеет.

Раскроем скобки и преобразуем равенство к виду z (zx–2 – 1) = 2.

Так как z и x не меньше 2, то левая часть уравнения неотрицательна.

При x = 2 корней нет.

При x ³ 3 левая часть положительна, а если при этом z ³ 3, то левая часть уравнения будет больше правой (также нет корней).

Остается случай z = 2, тогда x = 3.

9. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляют всевозможные семизначные числа, в которых каждая цифра участвует только один раз. Доказать, что сумма этих чисел делится на 9.

Сопоставим каждому такому числу x число 8888888 – x, оно также состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и каждая цифра используется один раз. Сумма чисел в каждой паре 8888888. Всего таких чисел 7!, значит таких пар 7! / 2.Значит вся сумма равна 7! × 4444444. Число 7! делится на 9, значит и сумма чисел делится на 9.

ЗАДАЧИ

1. По итогам работы трех бригад оказалось, что первая и вторая бригады вместе изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья вместе – в три раза больше, чем вторая. Какая бригада изготовила наибольшее число деталей?

2. Сколько делителей у числа 2n*3m*5k?

3. Можно ли выбрать внутри квадрата две различные точки так, что если соединить их со всеми вершинами квадрата, то квадрат разобьется на а) 6 или б) 9 равновеликих частей?

4. С помощью циркуля и линейки построить треугольник по заданному основанию, углу при основании и сумме длин двух сторон.

5. Найти наименьший член последовательности чисел ak=k2-2004*k+20042004, где k - натуральное число.

6. Решить в целых числах уравнение: 1/x+1/y=14.

4 октября 1999г.

1. (2б) Докажите, что следующие числа составные: а) (2б) $\left(2^3\right)^{1999}-1$. **; б) (2б)** $\left(2^3\right)^{1999}+1$

2. (3б) Решить в целых числах уравнение 6x2+5y2=74.

3. (4б) Найти сумму $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1998}+\sqrt{1999}}$.

4. (5б) Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе как на стороне во внешнюю сторону треугольникапостроен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

5. (6б) В банк кладётся 1000 руб. В каком случае спустя один год вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет 5/12% один раз в месяц?

6. (8б) Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и по 150 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Можно ли это сделать?

4 октября 1999г.

1. (2б) Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.

2. (3б) Найдите, какую цифру означает каждая буква в следующем равенстве: AAH=AHHA.

3. (4б) Найти сумму S=1+2x+3x2+4x3+...+nxn-1.

4. (5б) Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе как на стороне во внешнюю сторону треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

5. (6б) В банк кладётся 1000 руб. В каком случае спустя один год вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет 5/12% один раз в месяц?

г.Новосибирск

1. Доказать тождество: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} xy+y^2+x=5y, \\ x^2+xy=6y. \end{cases}$

3. Доказать, что среди чисел вида 210n+1, где n - любое натуральное, бесконечно много составных.

4. В выпуклом четырёхугольнике ABCD биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD. Доказать, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

5. Расставить на шахматной доске 8 на 8 клеток несколько коней так, чтобы каждый из них бил ровно четырёх других.

6. Все города некоторой страны связаны попарно дорогами с односторонним движением. Докажите, что всегда найдётся город, из которого до любого другого можно доехать не более, чем с одной пересадкой.

1. Найти все решения уравнения $|x^2 – 4| + |x^2 – 9| = 5$.

2. Баба Яга и Кащей Бессмертный собирали мухоморы. Общее число крапинок на мухоморах Бабы Яги оказалось в 13 раз больше, чем у Кащея. Когда Баба Яга отдала Кащею мухомор с наименьшим количеством крапинок, на её мухоморах стало в 8 раз больше крапинок, чем у Кащея. Доказать, что сначала у Бабы Яги было не более 23 мухоморов.

3. Пусть AM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла A, а P и Q — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABM, с его сторонами AB и BM соответственно. Известно, что PQ параллельно AM. Найти углы треугольника ABC.

4. Найти все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = x (y + z)$.

5. На доске написано выражение: 4 – 5 – 7 – 11 – 19 = 22. Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство.