

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2013/14 год

1. У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему вдвое больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему теперь, им обоим вместе будет 81 год. Сколько лет мужу сейчас?
2. Последовательность a_n такова, что $a_1 = 4$, $a_2 = 25$. Найдите a_{200} , если для любого натурального n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$.
3. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 16$, а $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 18$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.
4. При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$?
5. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 85 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?
6. При каком наименьшем значении параметра a функция $2x^3 + 18x^2 + ax + 5$ будет возрастать на всей числовой оси?
7. В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM к боковой стороне. Найдите квадрат радиуса окружности, описанной около треугольника ABC , если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и AMC , равны 30 и 15.
8. Отметили все вершины правильного девятиугольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?
9. Какое наибольшее значение может иметь знаменатель геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots$, если число 5 является корнем уравнения $b_{10}x^9 + \dots + b_3x^2 + b_2x + b_1 = 0$?
10. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку D , лежащую на стороне AB , проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC за точкой C в точке E . Найдите длину боковой стороны треугольника ABC , если $AC = 21$, $CE = 35$ и $BD = AB/8$.
11. Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7 и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.
12. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной 24 отмечены точки E и F соответственно. Угол ECF равен 30° . Из вершин B и D проведены перпендикуляры к отрезкам CE и CF . Какая наибольшая площадь может быть у четырёхугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров?
13. Площадь проекции прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с параллелограммом $ABCD$ в основании на плоскость, перпендикулярную её диагонали AC_1 , равна $\sqrt{41}$. Чему будет равна площадь проекции этой призмы на плоскость, перпендикулярную диагонали BD_1 , если $AA_1 = 5$, $AC = 12$, $BD = 4$?

14. На клетчатой бумаге по линиям сетки выделили прямоугольник 10×15 клеток. В нём отметили все узлы, в том числе и лежащие на его границе. Какое наибольшее число отмеченных узлов можно выбрать так, чтобы никакие три из них не являлись вершинами прямоугольного треугольника?
15. Из начала координат проведено 240 лучей, которые делят координатную плоскость на углы в $1,5^\circ$. Известно, что четыре из них совпадают с координатными полуосями. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих лучей с прямой $y = 30 - x$.
16. Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника ABC , прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами он может попасть из вершины A обратно в вершину A за 9 прыжков?
17. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 18$. На продолжении диагонали CA за точку A выбрана точка H так, что $AH = 3CA$. Отрезок $SH = 4$ перпендикулярен плоскости основания пирамиды. Какой наибольший объем V может иметь цилиндр, расположенный внутри пирамиды так, что одно из его оснований лежит на основании пирамиды? В ответе укажите величину V/π .
18. Прямоугольный параллелепипед $35 \times 40 \times 56$, разбитый на 78400 единичных кубиков, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков протыкает игла?
19. В турнире участвовали 89 теннисистов. Все игры проходили на одном корте. Спортсмен, проигравший хотя бы одну игру, выбывает из турнира. Известно, что у участников каждой встречи количество предыдущих побед отличалось не более чем на одну. Какое наибольшее число игр мог сыграть победитель турнира?
20. В выпуклом 17-угольнике проводят все его диагонали. На какое наибольшее число частей они могут его разбить?

Ответы

1. 36.
2. 25.
3. 144.
4. 0,5.
5. 175.
6. 54.
7. 600.
8. 2304.
9. $-0,2$.
10. 14,4.
11. 120.
12. 72.
13. 13.
14. 25.
15. 1785.
16. 170.
17. 12.
18. 112.
19. 9.
20. 2500.