Второй этап Всероссийской олимпиады школьников «Шаг в будущее» 2009 г.
Математика

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму осталось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому осталось изготовить 9 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу?

2. Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos x+\sqrt{1+\sin x}=0.$$

3. Решите неравенство:

$$\left(2^{-\frac{1}{x}}-2\right)\log_3\left(\frac{1}{4}-x\right)\ge 0.$$

4. Решите уравнение:

$$\frac{|\sin x|}{\sin x}+1=2(x+3)^2.$$

5. Решите неравенство:

$$(\cos x+1)\left(1-\sqrt{x+3}\right)\ge 0.$$

6. Решите неравенство:

$$\log_x(16-24x+9x^2)<0.$$

7. В равностороннем треугольнике *ABC* на сторонах *AB*, *BC* и *AC* выбраны точки *K*, *L* и *M* так, что *AK* : *KB* = 6:1, *BL* : *LC* = 5:2, *AM* : *MC* = 3:4. Площадь круга, описанного около треугольника *KLM*, равна 28π. Найдите длину стороны треугольника *ABC*.

8. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$$3y^2=2(1+\cos 2x),\ \ x|\le\frac{\pi}{2},$$

а стороны параллельны координатным осям?

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение

$$(x+a)^2=9\left(1-x+|x|\right)$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

10. Основанием пирамиды *TABC* служит прямоугольный треугольник *ABC*, а все боковые рёбра пирамиды равны *l*. Боковое ребро *TB* наклонено к плоскости основания под углом 30°, а угол между *TB* и гипотенузой основания *AC* равен 45°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро *TB* и точку *M* на стороне *AC*? Найдите расстояние от середины гипотенузы *AC* до точки *M*, когда площадь сечения наименьшая.

Ответы

1. 12 деталей.

2. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. $\left[-1;-\frac{3}{4}\right]\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)$

4. $-4,\ -3$.

5. $\{\pi+2\pi n,\ n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\}\cup[-3;-2]$.

6. $(0;1)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

7. 14.

8. $4\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9.

1) $a\in(-\infty;-5)$: $x_{1,2}=-a\pm 3$;

2) $a\in(-3;3]$: $x_1=-a+3$, $x_2=-a-9-\sqrt{18(a+5)}$;

3) $a\in(3;+\infty)$: $x_{1,2}=-a-9\pm\sqrt{18(a+5)}$.

10. $\frac{l^2\sqrt{2}}{8}$; $\frac{l}{2\sqrt{2}}$.

Второй этап Всероссийской олимпиады школьников «Шаг в будущее» 2009 г.

Физика.

1. Ракета длиной L и массой m стоит вертикально на стартовой площадке. Моделируя ракету однородным цилиндром, определите упругую силу, возникающую в сечении ракеты на высоте, равной $3/4L$.

2. Тело массой m = 1кг бросили под углом α = 30° к горизонту. Определите кинетическую энергию тела в наивысшей точке траектории, если кинетическая энергия тела в начальный момент времени равна E_0 = 10 Дж. Сопротивление атмосферы не учитывать.

3. Шарик совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. На сколько сместится шарик от положения равновесия за минимальное время, в течение которого модуль импульса шарика уменьшится в четыре раза?

4. Объём вязкого жидкого топлива плотности ρ, поступающего в ракету через горизонтальный трубопровод за время τ, равен Q. Определите разность давлений Δp, измеренных двумя манометрами, установленными в местах, где сечения трубы равны S_1 и S_2 соответственно. Поток жидкости считать стационарным.

5. Определите теплоёмкость 160 г газа аргона с молярной массой $\mu = 4\cdot10^{-2}$ кг /моль в изобарическом процессе.

6. В идеальном колебательном контуре амплитуда тока в катушке индуктивности равна I_m. Определите силу тока в катушке в некоторый момент времени, когда напряжение на конденсаторе составляет три четверти от максимального значения.

7. Две заряженные частицы массой m каждая летят вдоль прямой навстречу друг другу, имея на достаточно большом расстоянии одинаковые по модулю скорости, равные v_0. На какое минимальное расстояние могут сблизиться частицы, если их заряды равны q и $4q$?

8. На двух резисторах сопротивлениями R_1 = 2 Ом и R_2 = 8 Ом, поочерёдно подключаемых к одному источнику тока, выделяются одинаковые тепловые мощности. Определите внутреннее сопротивление источника.

9. Сколько энергии светового излучения от Солнца падает на космический «парус» за время τ = 1мин, если световое давление на парус, площадь поверхности которого S =180 м^2, равно P = 5 мкПа. Зеркальная поверхность паруса полностью отражает свет. Свет падает на поверхность паруса нормально.

10. Какую минимальную дополнительную скорость в направлении движения следует сообщить кратковременно космическому кораблю, движущемуся по орбите, радиус которой в 5 раз больше радиуса Земли, чтобы он смог преодолеть поле силы тяжести Земли? Значение первой космической скорости для Земли равно v_1 = 7,9 км/с.

Ответы.

1. $T = mg/4$.

2. $E_к = E_0 \cos^2\alpha = 7{,}5$ Дж.

3. $x = A\dfrac{\sqrt{15}}{4} \approx 9{,}7$ см.

4. $\Delta p = \dfrac{\rho Q^2}{2\tau^2}\left(\dfrac{1}{S_1^2} - \dfrac{1}{S_2^2}\right)$.

5. $C = \dfrac{i+2}{2}\cdot\dfrac{m}{\mu}R \approx 83$ Дж/К $(i=3)$.

6. $I = I_m\dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66 I_m$.

7. $r_{\min} = 2q^2/\pi\varepsilon_0 m v_0^2$.

8. $r = \sqrt{R_1R_2} = 4$ Ом.

9. $E_ф = \dfrac{1}{2}PSc\tau = 8{,}1$ МДж.

10. $\Delta v = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}v_1 \approx 1{,}46$ км/с.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Комплекс предметов «ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ»

МАТЕРИАЛЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

2008-2009 ГОД

I. Научно-образовательное соревнование

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант I.

Задача №1.

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

Задача №2.

Решить систему неравенств $\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$

Задача №3.

Докажите, что $\sin^2 \dfrac{x}{2} \cdot \cos x < \dfrac{1}{7}$ при всех действительных x.

Задача №4.
Стороны треугольника относятся как $7:8:9$. Найти отношение радиуса описанной около треугольника окружности к радиусу вписанной в него окружности.

Задача №5.
Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Прямая, проведенная через вершину прямого угла C перпендикулярно медиане BD, пересекает гипотенузу в точке M. Найти отношение $\dfrac{AM}{MB}$.

Вариант II.

Задача №1.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 41, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 189. \end{cases}$

Задача №2.

На каких промежутках возрастает функция $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x - \sin x + 3$?

Задача №3.

Решить неравенство $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5| > 0.$

Задача №4.

С помощью производной найти число корней уравнения $x^4 - 4x - 9 = 0.$

Задача №5.

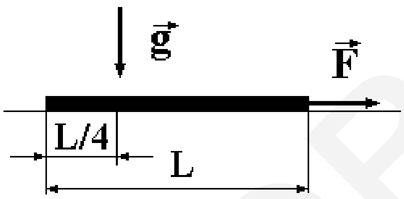
На сторонах квадрата ABCD взяты точки M, N и K, где точка M – середина AB, N лежит на стороне BC, причем 2BN=NC, К лежит на стороне DA, причем 2DK = KA . Найти синус угла между MC и NK.

ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ

Вариант I.

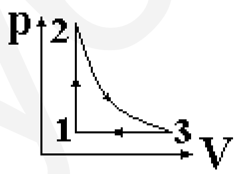
Задача №1.

Толстый массивный канат постоянного сечения длиной L, лежащий на гладкой горизонтальной плоскости, тянут за правый конец, прикладывая к нему постоянную силу F (см. рис.). Найти силу натяжения каната в сечении, расположенном на расстоянии $L/4$ от его левого конца.



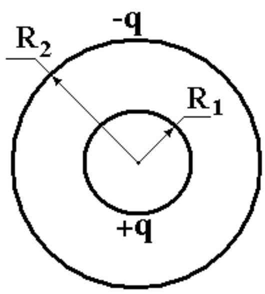
Задача №2.

На рисунке дан график зависимости давления газа от его объема в циклическом процессе 1-2-3. 1-2 – изохора, 2-3 – изотерма, 3-1 – изобара. Построить для данного циклического процесса график зависимости температуры газа от его объема.



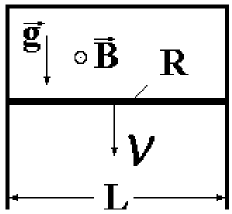
Задача №3.

Две концентрические металлические пустотелые сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) заряжены зарядами $+q$ и $-q$ соответственно. Какое количество теплоты Q выделится после соединения сфер проводником с большим сопротивлением?



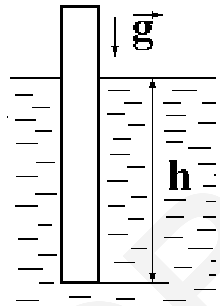
Задача №4.

По двум вертикальным шинам, соединенным между собой проводником, под действием силы тяжести скользит горизонтальная проводящая перемычка массой m, длиной ℓ и сопротивлением R. Движение происходит в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, вектор которой перпендикулярен плоскости перемещения перемычки. Пренебрегая трением, сопротивлением шин и проводника, найти установившуюся скорость падения перемычки.



Задача №5.

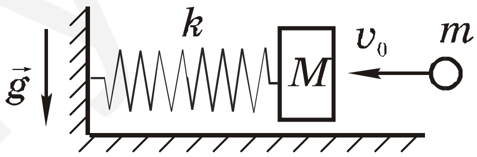
На поверхности жидкости плавает призматическое тело, погруженное в жидкость на глубину h. Определить период T малых колебаний тела, если вязкое сопротивление жидкости движению тела пренебрежимо мало.



Вариант II.

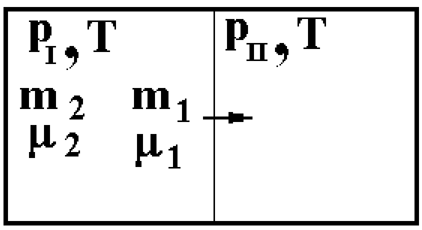
Задача №1.

Шарик массой m ударяется о брусок массой M, закрепленный на пружине жесткостью k (см. рис.). Определить максимальное сжатие пружины x, считая удар абсолютно упругим. Скорость шарика перед ударом v_0. Деформацией пружины за время удара пренебречь.

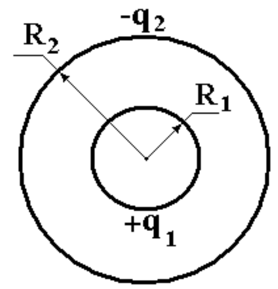


Задача №2.

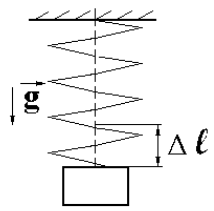
Сосуд объемом $2V$ разделен пополам тонкой полупроницаемой перегородкой. В левую половину ввели газ массой m_1 и газ массой m_2. В правой половине – вакуум. Через перегородку может диффундировать только первый газ. Температура T остается постоянной. Молярная масса газов равна μ_1 и μ_2 соответственно. Какие давления p_{I} и p_{II} установятся в обеих половинах сосуда?



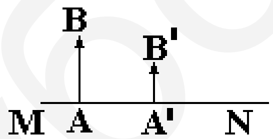
Задача №3.
Две концентрические металлические пустотелые сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) заряжены зарядами $+q_1$ и $-q_2$ соответственно. Какое количество теплоты Q выделится после заземления наружной сферы через проводник с большим сопротивлением?



Задача №4.
Груз, подвешенный на пружине, вызвал изменение ее длины на Δl. Найти период собственных колебаний T.



Задача №5.
На рисунке показаны главная оптическая ось линзы *MN*, предмет *AB* и его изображение $A'B'$. Определить графически положение оптического центра *P* и фокуса *F* линзы.



II. Академическое соревнование

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант I.

Задача №1.
Решите уравнение
$(\sqrt{x}-4)^4+(\sqrt{x}-8)^4=32.$

Задача №2.
Решите уравнение
$1+\cos 38x\cos 20x+2\cos 9x\cos 29x=0.$

Задача №3.
Решите неравенство
$$\frac{x-4}{\log_2\left(32-2^x\right)-6}\le 0.$$

Задача №4.
Докажите, что все точки пересечения взаимно перпендикулярных касательных к кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ лежат на одной прямой. Найдите уравнение этой прямой.

Задача №5.
В треугольнике длины двух сторон равны 6 см и 3 см. Определить третью сторону, если полусумма высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей стороны.

Вариант II.

Задача №1.
Решите уравнение
$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=8\,.$$

Задача №2.
Решите уравнение
$$\cos^8 x+\sin^8 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{32}(1-\cos 4x)^2.$$

Задача №3.
Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6\right)+\log_9 x^2\ge 0.$$

Задача №4.
При каких значениях параметра a кривые $y_1=2\sqrt{x}$ и $y_2=ax^2+3x$ имеют общую касательную в точке пересечения?

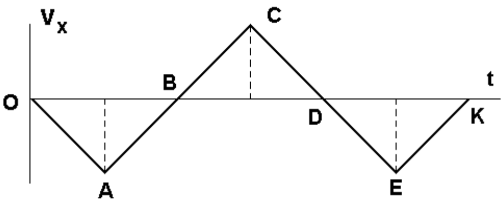
Задача №5.
Из центра окружности, вписанной в треугольник со сторонами13, 14 и 15, проведена новая окружность радиуса 5. Найти длины хорд, отсекаемых этой новой окружностью на сторонах треугольника.

ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ

Вариант I.

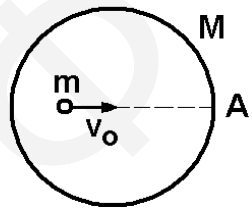
Задача №1.

На рисунке дан график зависимости от времени t проекции на ось x скорости тела $v_x(t)$, движущегося прямолинейно. Построить график его перемещения и ускорения, если равнобедренные треугольники OAB, BCD и DEK равны.



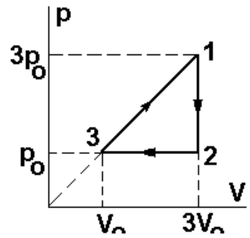
Задача №2.

На гладком горизонтальном столе лежат незакрепленное кольцо радиусом R и массой M и шарик массой m (см. рис.). Шарику сообщают скорость v_0. Определить время τ между двумя последовательными ударами шарика о кольцо в точке A. Удары считать абсолютно упругими.



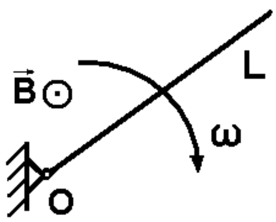
Задача №3.

С ν молями идеального одноатомного газа осуществляется цикл, показанный на рисунке в координатах V–p. (1-2) – изохора, (2-3)-изобара; (3-1) – прямая. Определить КПД цикла.



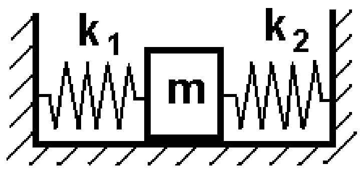
Задача 4.

В вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью проводник длиной L (см. рис.). Плоскость вращения проводника – горизонтальная. Между концами проводника возникает напряжение U. Определить угловую скорость вращения проводника ω.



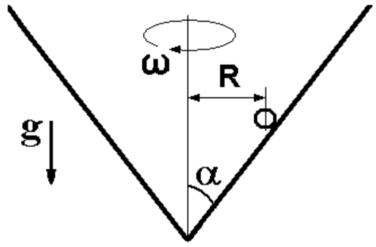
Задача №5.

Определить период T малых колебаний груза массой m, закрепленного с помощью пружин жесткостями k_1 и k_2 (см. рис).

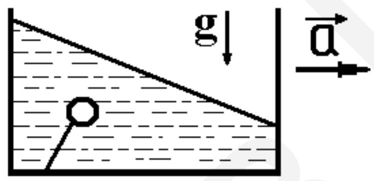


Вариант II.

Задача №1.
Конус с углом полураствора α вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (см. рис.). На внутренней поверхности конуса лежит маленький груз, вращающийся вместе с ним. Определить расстояние R между осью вращения и центром масс груза. Трением пренебречь.

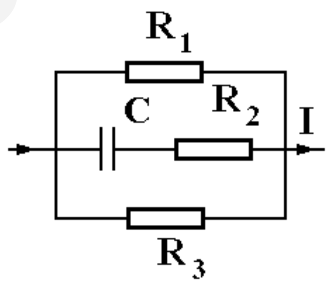


Задача №2.
Сосуд с водой движется горизонтально с ускорением a. Ко дну сосуда на невесомой нити прикреплен деревянный шарик массой m и объемом V (см. рис.). Определить силу натяжения нити F. Плотность воды ρ.



Задача №3.
Свинцовая пуля пробивает деревянную стенку и застревает в ней. При какой начальной скорости пули она полностью расплавится, если на нагревание пули идет $\eta = 0{,}6$ потерянной механической энергии? Температура пули в момент удара $t_1 = 50\ °\mathrm{C}$. Теплоемкость свинца $c = 125{,}7\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$, температура плавления $t_п = 327\ °\mathrm{C}$, удельная теплота плавления свинца $\lambda = 26{,}4 \cdot 10^3\ \text{Дж}/\text{кг}$.

Задача №4.
Определить заряд q на конденсаторе $C = 1\ мкФ$, включенном в цепь постоянного тока. $I = 3$ А, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $R_3 = 300\ Ом$



Задача №5.
Через какое время в долях от периода T после начала разрядки конденсатора в колебательном контуре его энергия составит половину от максимальной?