# Олимпиада «Физтех» по математике

## 9 класс, онлайн-этап, 2013/14 год

**1.** На доску выписаны числа $a_1$, $a_2$, …, $a_{200}$. Известно, что $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Найдите $a_{200}$, если для любого натурального $n$ справедливо равенство $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

**2.** Предприниматель Петров купил в Ростове несколько мешков картошки и продал их в Москве, получив на 90000 рублей больше, чем потратил. На все вырученные деньги он снова купил в Ростове картошку и продал в Москве. На этот раз прибыль составила 120000 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку, если цены закупки и продажи мешка картошки не изменились?

**3.** Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

**4.** В мешке 90 шаров, отличающихся только цветом: 25 красных, 25 синих, 25 желтых и 15 зелёных. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 15 шаров одного цвета?

**5.** Сколько одинаковых членов находится среди первых 2000 членов арифметических прогрессий 9, 11, 13, … и 3, 8, 13, …?

**6.** Через сколько секунд после того, как часы показывали 7 часов, минутная стрелка догонит часовую? Ответ округлите до целого числа.

**7.** В парке росли дубы и клёны. Клёнов среди них было 80%. Весной в парке посадили ещё дубов, после чего клёнов стало 40%. А осенью посадили ещё клёнов, и клёнов стало снова 80%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

**8.** У Васи есть семь книг по математике, а у Вани — девять. Все 16 книг разные. Сколькими способами они смогут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?

**9.** При каком значении параметра $a$ значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 + 4ax + 4a - 3 = 0$?

**10.** Какая наибольшая площадь может быть у треугольника, если длины двух его медиан равны 12 и 17, а угол между ними равен 150°?

**11.** Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?

**12.** Длины сторон треугольника $ABC$ равны 13, 22 и 27. $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — его медианы, а $AA_2$, $BB_2$ и $CC_2$ — его высоты. Найдите длину замкнутой ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$.

**13.** Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n + 6$ и $23n + 5$, если $n$ — натуральное число?

**14.** Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 6$ и $AD = 7$ вписана в окружность. Продолжение средней линии $MN$ трапеции за точку $M$ пересекает окружность в точке $K$. Найдите квадрат высоты трапеции, если $MK = 1$.

ЯКОВ.РФ

**15.** Дан выпуклый 15-угольник, никакие три диагонали которого не имеют общих точек, отличных от вершин. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).

**16.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ проведена медиана $AM$ к боковой стороне. Найдите квадрат радиуса окружности, описанной около треугольника $ABC$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABM$ и $AMC$, равны соответственно 33 и 11.

**17.** Отметили все вершины правильного 12-угольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?

**18.** Какое наибольшее значение может принимать знаменатель геометрической прогрессии $b_1$, $b_2$, ..., если число 5 является корнем уравнения $b_{10}x^9 + \ldots + b_3x^2 + b_2x + b_1 = 0$?

**19.** Из начала координат проведено 240 лучей, которые делят координатную плоскость на углы в 1,5°. Известно, что четыре из них совпадают с координатными полуосями. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих лучей с прямой $y = 30 - x$.

**20.** На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 19 параллельных между собой прямых, в другом — 23 параллельных между собой прямых, в третьем — 36 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?

Ягубов.рф

**Ответы**

**1.** 9.

**2.** 270000.

**3.** 45.

**4.** 57.

**5.** 400.

**6.** 2291.

**7.** 6.

**8.** 2940.

**9.** 0,25.

**10.** 68.

**11.** 100.

**12.** 62.

**13.** 83.

**14.** 29,75.

**15.** 1365.

**16.** 396.

**17.** 33792.

**18.** $-0{,}2$.

**19.** 1785.

**20.** 2028.

Ягубов.рф