

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2015/16 год

1. Сколько существует пар натуральных чисел $x > y$ таких, что их произведение на 19999 больше их суммы?

15

2. Найдите сумму действительных корней всех квадратных трёхчленов вида $y = x^2 + px + 122$, где p принимает все целые значения от -35 до 17 .

37

3. В параболу $y = 0,5x^2$ вписан прямоугольный треугольник (то есть все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ox . Какую наибольшую длину может иметь высота этого треугольника, опущенная на гипотенузу?

2

4. Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в которых цифры $9, 7, 3, 1, 0$ используются ровно по одному разу. Найдите среднее арифметическое этих чисел. Ответ округлите до целого.

54166

5. Набор чисел a, b, c каждую секунду заменяется на $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. В начале имеется набор чисел $1000, 987, 998$. Через некоторое время получился набор $4067, 6115, x$. Какое наибольшее значение может принимать x ?

7197

6. Лабиринт представляет из себя цепочку из 7 комнат. Из первых 4 комнат в следующие ведут 2 двери, из оставшихся в следующую ведут 3 двери (из последней комнаты 3 двери ведут на выход). Лаборант случайным образом запер 10 дверей. Какова вероятность того, что крыса, посаженная в первую комнату, сможет выбраться из лабиринта? Ответ выразите в процентах и округлите до десятых.

2,2

7. В некоторой стране 65 городов. Известно, что в любых 30 городах проживает не менее чем 21% жителей страны. Какой наибольший процент жителей этой страны может проживать в столичном городе?

55,2

8. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC , DE и DF — биссектрисы треугольников ABD и CBD . Отрезки BD и EF пересекаются в точке M . Найдите отрезок DM , если $EF = 6$.

3

9. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 14$. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, последовательно переместив точку A на некоторое расстояние параллельно отрезку BC (точка A_1), затем точку B — параллельно отрезку A_1C (точка B_1) и, наконец, точку C — параллельно отрезку A_1B_1 (точка C_1). Чему равна длина отрезка B_1C_1 , если оказалось, что угол $A_1B_1C_1$ прямой и $A_1B_1 = 2$?

21

10. На плоскости проведены 3 семейства по 6 прямых трёх разных направлений, причём прямые различных направлений пересекаются. Какое наибольшее количество ограниченных областей вырезают они из плоскости?

16

11. В депо три пути для формирования составов. Пути расположены с севера на юг. На пути №1 стоит состав из 25 вагонов. За одну операцию маневрирования тепловоз может перевезти один вагон с любого пути на любой другой путь. Причём он может брать и ставить вагоны только с одной (южной) стороны. За какое наименьшее количество операций тепловоз сможет собрать все вагоны на пути №1 в порядке, обратном исходному?

73