21. 31 декабря 2015 года Иван Петрович взял 13 240 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Иван Петрович переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Иван Петрович выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?
Ответ: 5 324 000 руб.

Задачи на прогрессии

Определение и свойства арифметической прогрессии

Последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется арифметической прогрессией.

Число d — разность прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии — каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Определение и свойства геометрической прогрессии

Последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же, отличное от нуля, число q, называется геометрической прогрессией.

Число q — знаменатель прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \quad S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии: каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется бесконечно убывающей, а ее сумма определяется по формуле: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 1

Произведение первого и пятого членов убывающей арифметической прогрессии на 75 меньше произведения второго и четвертого ее членов. Найти сумму первых пяти членов прогрессии, если сумма первого и второго ее членов равна 7.

Решение.

По условию задачи $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 + 75 = a_2 \cdot a_4, \\ a_1 + a_2 = 7. \end{cases}$

Выразим по формуле: $a_n = a_1 + d(n-1)$ второй, четвертый и пятый члены прогрессии: $a_2 = a_1 + d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_5 = a_1 + 4d$.

Система примет вид: $\begin{cases} a_1(a_1 + 4d) + 75 = (a_1 + d)(a_1 + 3d) \\ a_1 + (a_1 + d) = 7 \end{cases}$;

$\begin{cases} a_1^2 + 4a_1 d + 75 = a_1^2 + 4a_1 d + 3d^2, \\ 2a_1 + d = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} d^2 = 25, \\ 2a_1 + d = 7. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} d = 5 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} d = -5, \\ a_1 = 6. \end{cases}$

Прогрессия по условию убывающая. Следовательно, $\begin{cases} d = -5, \\ a_1 = 6. \end{cases}$

Найдем сумму первых пяти членов прогрессии:

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{(12 - 20) \cdot 5}{2} = -20.$$

Ответ: -20.

Пример 2

Разность первого и пятого членов убывающей геометрической прогрессии равна 240, а разность второго и четвертого равна 72. Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии.

Р е ш е н и е.

Так как $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_4 = b_1 \cdot q^3$ (по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$), то условие задачи приведет к системе уравнений с двумя переменными b_1 и q: $\begin{cases} b_1 - b_5 = 240, \\ b_2 - b_4 = 72, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} b_1 - b_1 \cdot q^4 = 240, \\ b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^3 = 72. \end{cases}$

Имеем далее $\begin{cases} b_1\left(1 - q^4\right) = 240, \\ b_1 \cdot q\left(1 - q^2\right) = 72. \end{cases}$

Так как $q \neq 1$ и $b_1 \neq 0$ (прогрессия убывающая), то, разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{1-q^4}{q\left(1-q^2\right)} = \frac{240}{72}; \quad \frac{1+q^2}{q} = \frac{10}{3}; \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0; \quad q = 3 \text{ или } q = \frac{1}{3},$$

($q = 3$ не удовлетворяет условию задачи). Тогда

$b_1 = \dfrac{240}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}$; $b_1 = 243$. Найдем сумму восьми первых членов:

$$S_8 = \frac{243\left(\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3280}{9} = 364\frac{4}{9}.$$

О т в е т: $364\frac{4}{9}$.

Пример 3

Докажите, что числа $\dfrac{1}{\log_3 2}$, $\dfrac{1}{\log_6 2}$, $\dfrac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

Р е ш е н и е.

Используем характеристическое свойство арифметической прогрессии: $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, то есть $\dfrac{1}{\log_6 2} = \dfrac{\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2}}{2}$.

Упростим данное равенство, так как $\dfrac{1}{\log_b a} = \log_a b$.

$$\log_2 6 = \frac{\log_2 3 + \log_2 12}{2}; \quad \log_2 6 = \frac{1}{2}\log_2 36; \quad \log_2 6 = \log_2 6.$$

Следовательно, числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию. Что и требовалось доказать.

Пример 4

Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если первое из них оставить без изменения, ко второму из них прибавить 1, а к третьему прибавить 5, то получится возрастающая геометрическая прогрессия. Найти произведение исходных трех чисел.

Решение.

Обозначим исходные три числа a_1, a_2, a_3. Используя для арифметической прогрессии обозначение $\div$ и для геометрической прогрессии $\div\div$, запишем условие задачи следующим образом:

1) $\div\, a_1, a_2, a_3$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 15$; 2) $\div\div\, a_1, a_2 + 1, a_3 + 5$.

Воспользовавшись формулой n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ и характеристическим свойством геометрической прогрессии, получим соответственно:

1) $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 15$;

2) $(a_2 + 1)^2 = a_1(a_3 + 5)$, где $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$.

Таким образом, мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными a_1 и d.

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 5). \end{cases}$$

Имеем далее: $\begin{cases} a_1 + d = 5, \\ (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 5). \end{cases}$

Выразив a_1 через d из первого уравнения и подставив это выражение вместо a_1 во второе уравнение, получим: $36 = (5-d)\cdot(10+d)$, откуда находим $d = -7$ или $d = 2$.

Следовательно, $a_1 = 12$ при $d = -7$ или $a_1 = 3$ при $d = 2$.

Пара чисел $a_1 = 12$ и $d = -7$ не удовлетворяет условию, так как арифметическую прогрессию составляют три положительных числа.

Значит, условию удовлетворяют три числа 3; 5; 7. Произведение этих чисел равно 105.

О т в е т : 105.

Пример 5

Сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов арифметической прогрессии равна 20. Найти сумму первых двадцати членов этой прогрессии.

Р е ш е н и е .

Так как $a_3 = a_1 + 2d,\ a_7 = a_1 + 6d,\ a_{14} = a_1 + 13d,\ a_{18} = a_1 + 17d$, то

$a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 4a_1 + 38d = 2(2a_1 + 19d)$.

По условию $2(2a_1 + 19d) = 20$, то есть $2a_1 + 19d = 10$.

Второе уравнение с неизвестными a_1 и d получить не удастся. Сумма первых двадцати членов:

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2a_1 + 19d) \cdot 10 = 10 \cdot 10 = 100,$$

так как $2a_1 + 19d = 10$.

О т в е т : 100.

Пример 6

Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член уменьшить на 4, то полученные числа в том же порядке опять составят геометрическую прогрессию. Если в новой прогрессии третий член уменьшить на 9, то получится арифметическая прогрессия. Найти первоначально данные числа.

Р е ш е н и е .

Обозначим искомые три числа b_1, b_2, b_3. Используя обозначения

$\div$ для арифметической прогрессии и для геометрической прогрессии

∺, запишем условие задачи следующим образом:

1) ∺ b_1, b_2, b_3;

2) ∺ $b_1, b_2 - 4, b_3$;

3) $\div\, b_1, b_2 - 4, b_3 - 9$.

Воспользовавшись характеристическим свойством геометрической и арифметической прогрессий, получим соответственно:

1) $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$; 2) $(b_2 - 4)^2 = b_1 \cdot b_3$; 3) $b_2 - 4 = \dfrac{b_1 + b_3 - 9}{2}$.

Так как $b_2 = b_1 \cdot q$, а $b_3 = b_1 \cdot q^2$, то:

1) $b_1^2 \cdot q^2 = b_1 \cdot b_1 \cdot q^2$;

2) $(b_1 \cdot q - 4)^2 = b_1 \cdot b_1 \cdot q^2$;

3) $b_1 \cdot q - 4 = \dfrac{b_1 + b_1 \cdot q^2 - 9}{2}$.

Первое условие как тождественное равенство можно опустить. Мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1^2 \cdot q^2 - 8b_1 \cdot q + 16 = b_1^2 \cdot q^2; \\ 2b_1 \cdot q - 8 = b_1 + b_1 \cdot q^2 - 9. \end{cases}$$

Имеем далее:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q = 2; \\ b_1\left(q^2 - 2q + 1\right) = 1. \end{cases}$$

Выразим b_1 через q из первого уравнения системы: $b_1 = \dfrac{2}{q}$ и подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы: $\dfrac{2\left(q^2 - 2q + 1\right)}{q} = 1$, откуда находим $q = 2$ или $q = \dfrac{1}{2}$.

При $q = 2$ $b_1 = 1$ и при $q = \dfrac{1}{2}$ $b_1 = 4$.

Значит, условию задачи удовлетворяют две тройки чисел:

1) 1, 2, 4; 2) 4, 2, 1.

Ответ: 1, 2, 4 и 4, 2, 1.

Пример 7

Сумма пятнадцати первых членов геометрической прогрессии составляет 30% суммы ее последующих пятнадцати членов. Во сколько раз четвертый член прогрессии меньше ее девятнадцатого члена?

Решение.

1) Найдем сумму первых пятнадцати членов геометрической прогрессии:

$$S_{15} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{15} - 1\right)}{q - 1}.$$

2) Найдем сумму последующих пятнадцати членов геометрической прогрессии:

$$S_{30} - S_{15} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{30} - 1\right)}{q - 1} - \frac{b_1 \cdot \left(q^{15} - 1\right)}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{30} - q^{15}\right)}{q - 1}.$$

3) Составим уравнение на основании того, что сумма первых пятнадцати членов составляет 30% суммы ее последующих пятнадцати членов:

$$\frac{b_1 \cdot \left(q^{15} - 1\right)}{q - 1} = 0{,}3 \cdot \frac{b_1\left(q^{30} - q^{15}\right)}{q - 1}.$$

Имеем далее $1 = 0{,}3 \cdot q^{15}$ или $q^{15} = \frac{10}{3}$.

4) $b_4 = b_1 \cdot q^3;\;\; b_{19} = b_1 \cdot q^{18};\;\; b_{19} : b_4 = q^{15} = \frac{10}{3}.$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Пример 8

Ваня, Миша, Алик и Вадим ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных каждым из них, образует в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Алик поймал столько рыб, сколько Вадим, а Вадим поймал бы на 12 рыб больше, то количество рыб, пойманных юношами, образовало бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша?

Решение.

Обозначим количество рыб, пойманных Ваней, Мишей, Аликом и Вадимом, a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно. Используя обозначения $\div$ для арифметической прогрессии и $\div\!\div$ для геометрической прогрессии, запишем условие задачи следующим образом:

1) $\div\, a_1, a_2, a_3, a_4;$

2) $\div\!\div\, a_1, a_2, a_4, a_4 + 12;$ (*)

Воспользовавшись формулой n-го члена арифметической прогрессии, получим:

$a_2 = a_1 + d_3; \qquad a_4 = a_1 + 3d.$

Тогда условие (*) запишется в виде

$$\div\div\, a_1,\ a_1+d,\ a_1+3d,\ a_1+3d+12.$$

Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии для ее второго и третьего членов и получим систему уравнений с двумя неизвестными a_1 и d:

$$\begin{cases} (a_1+d)^2 = a_1\cdot(a_1+3d), \\ (a_1+3d)^2 = (a_1+d)\cdot(a_1+3d+12). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $d^2 = a_1 d$ или $d = a_1$, так как $(d \neq 0)$. Тогда из второго уравнения системы $d = 3$. Следовательно, $a_1 = 3$ и $d = 3$. Количество рыб, пойманных Мишей, равно 6.

Ответ: 6.

Пример 9

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов всех ее членов равна $\frac{108}{13}$. Найти первый член прогрессии.

Решение.

Пусть $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots b_n,\ \ldots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то есть $\div\div\, b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ \ldots b_1q^{n-1};\ \ldots$ и $|q|<1$.

По условию ее сумма равна 3, то есть $\frac{b_1}{1-q}=3$.

Рассмотрим последовательность $b_1^3,\ b_2^3,\ b_3^3,\ \ldots\ b_n^3,\ \ldots$, то есть

$$b_1^3,\ b_1^3q^3,\ b_1^3q^6,\ \ldots\ b_1^3q^{3n-3},\ \ldots. \qquad (*)$$

Каждый ее член получается из предыдущего умножением на q^3, то есть это геометрическая прогрессия. Так как $|q|<1$, то $|q^3|<1$ и последовательность (*) — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. По условию ее сумма равна $\frac{108}{13}$, то есть $\frac{b_1^3}{1-q^3}=\frac{108}{13}$.

Значит, в итоге мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=3, \\ \dfrac{b_1^3}{1-q^3}=\dfrac{108}{13}. \end{cases}$

Выразив b_1 из первого уравнения $b_1 = 3(1-q)$ и подставив во второе уравнение, получим $\frac{27(1-q)^3}{1-q^3} = \frac{108}{13}$, откуда $\frac{(1-q)^2}{1+q+q^2} = \frac{4}{13}$; $q = 3$ или $q = \frac{1}{3}$. Так как $|q| < 1$, то $q = 3$ не удовлетворяет условию. Тогда $b_1 = 3 \cdot (1-q) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$.

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ равна 7, а сумма квадратов ее членов равна 24,5. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

   Ответ: $6\frac{722}{729}$.

2. Три числа образуют конечную возрастающую геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то новая тройка чисел будет представлять собой конечную арифметическую прогрессию. Если третье число этой новой тройки увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти сумму трех данных чисел.

   Ответ: 28.

3. При делении 14-го члена арифметической прогрессии на ее 5-й член в частном получается 3, а при делении 18-го члена на 7-й член в частном получается 2 и в остатке 4. Найти 23-й член прогрессии.

   Ответ: 20.

4. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после вычитания из него числа 297 получается число с теми же цифрами, что и данное число, но в обратном порядке, если же цифры исходного числа, начиная с цифры сотен, увеличить соответственно на 8, 5 и 1, то полученные числа составят арифметическую прогрессию.

   Ответ: 421.

5. У некоторой геометрической прогрессии сумма членов на нечетных местах равна $\frac{21}{16}$, а сумма членов на четных местах равна