Формулы сокращённого умножения

1. (*Формулы сокращённого умножения*) Докажите тождества:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1});$$
$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \ldots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1});$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Отсюда заключаем:

1) $a^n - b^n$ делится на $a - b$ при любом натуральном n;
2) $a^{2n} - b^{2n}$ делится на $a + b$ при любом натуральном n;
3) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ делится на $a + b$ при любом натуральном n.

2. Докажите, что: а) $9^{26} - 2^{65}$ делится на 49; б) $5^{300} - 4^{200}$ делится на 141; в) $2^{60} + 7^{30}$ делится на 13.

3. (*ОММО, 2009*) Докажите, что $6255^3 - 5995^3$ делится на 13.

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) На сколько нулей оканчивается число

$$\left(1\underbrace{00\ldots0}_{2017}1\right)^{2017} - 1\,?$$

$\boxed{2018}$

5. (*ОММО, 2013*) Докажите, что число $2^{2014} + 1$ можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.

6. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Докажите, что число

$$10^{10^{10^{2013}}} + 10^{10^{2013}} + 10^{2013} - 1$$

не простое.

7. (*«Курчатов», 2017, 10*) Найдите все натуральные n такие, что число $8^n + n$ делится на $2^n + n$.

$\boxed{1,\ 2,\ 4,\ 6}$

Ягубов.РФ