Экстремальные характеристики графов

Экстремальные характеристики графа — это размеры наибольших или наименьших множеств, связанных с его вершинами или рёбрами. Одна такая характеристика нам уже известна: *хроматическое число* $\chi(G)$ есть наименьшее количество цветов, нужное для такой раскраски вершин графа G, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Как обычно, рассматривается граф $G = (V, E)$ без петель, кратных рёбер и ориентации. Говоря о множествах вершин графа, мы имеем в виду подмножества множества V.

Множество вершин графа называется *независимым*, если никакие две вершины этого множества не соединены ребром. Подграф, порождённый вершинами независимого множества, является набором изолированных вершин.

Теперь можно сказать, что хроматическое число $\chi(G)$ есть такое наименьшее m, что множество всех вершин графа G распадается в дизъюнктное объединение $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_m$ независимых множеств V_1, V_2, ..., V_m. Понятно, что указанные независимые множества — это и есть цвета.

Независимое множество называется *максимальным по включению*, если при добавлении к нему любой другой вершины оно перестаёт быть независимым.

Независимое множество M называется *максимальным по размеру*, если не существует независимого множества большей мощности, чем $|M|$. Понятно, что все максимальные по размеру независимые множества имеют одинаковую мощность; она обозначается $\alpha(G)$ и называется *числом независимости* графа G.

1. Найдите число независимости и хроматическое число графа: а) K_n; б) $K_{n,n}$.

а) $\alpha = 1$, $\chi = n$; б) $\alpha = n$, $\chi = 2$

2. Верно ли, что максимальное по размеру независимое множество является максимальным по включению?

3. Покажите, что максимальное по включению независимое множество не обязательно является максимальным по размеру; иными словами, мощность максимального по включению независимого множества может оказаться меньше числа независимости.

4. Множество $D \subset V$ называется *доминирующим*, если любая вершина из $V \setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из D. Покажите, что максимальное по включению независимое множество является доминирующим.

Множество вершин графа называется *кликой*, если любые две вершины этого множества соединены ребром. Подграф, порождённый кликой, является полным.

Максимальная по размеру клика — это клика наибольшей мощности. Все максимальные по размеру клики имеют одинаковую мощность, которая обозначается $\omega(G)$ и называется *кликовым числом* графа G.

5. *Дополнением* графа G называется граф $\overline{G}$, вершинами которого являются вершины G, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Покажите, что:

а) независимое множество в G является кликой в $\overline{G}$ и наоборот, клика в G является независимым множеством в $\overline{G}$;

б) $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$ и $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

6. Докажите, что для любого графа G на n вершинах выполнено неравенство

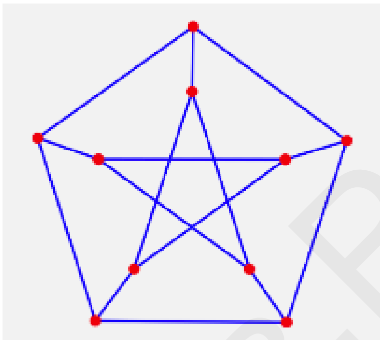
$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1.$$

7. Докажите неравенства:

а) $\chi(G) \geqslant \omega(G)$; б) $\chi(G) \geqslant \dfrac{|V|}{\alpha(G)}$.

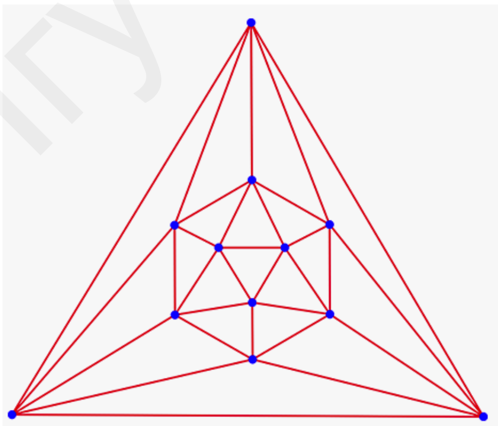
Проверьте данные неравенства для графов K_n и $K_{n,n}$.

8. Найдите число независимости и хроматическое число *графа Петерсена* (см. рисунок). Проверьте неравенства задачи 7. Какое наименьшее количество рёбер надо удалить из этого графа, чтобы он стал двудольным?



$\alpha = 4$, $\chi = 3$; 3 ребра

9. Найдите число независимости и хроматическое число графа на рисунке. Проверьте неравенства задачи 7.



$\alpha = 3$, $\chi = 4$

Неравенства задачи 7 являются стандартными оценками снизу для хроматического числа. Существует и оценка сверху.

10. Докажите, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G)+1$, где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G. Для каких двух очевидных типов графов в этой оценке достигается равенство?

Примечание. Оказывается, что для всех остальных графов оценка немного улучшается. Именно, *теорема Брукса* гласит, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$ для любого графа G, не являющегося полным графом или циклом нечётной длины.

Множество вершин графа называется *вершинным покрытием*, если хотя бы один из концов любого ребра принадлежит данному множеству. Размер наименьшего по мощности вершинного покрытия обозначается $\tau(G)$.

11. Докажите, что:

а) Множество S является вершинным покрытием тогда и только тогда, когда его дополнение $V \setminus S$ — независимое множество;

б) $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$.

12. Граф $G = (V, E)$ не содержит треугольников. Докажите, что $\tau(G) \geqslant \dfrac{|E|}{\alpha(G)}$.

13. Граф имеет 8 вершин, 16 рёбер и не содержит треугольников. Чему равно число независимости этого графа?

14. (*ММО, 2012, 10*) Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трёхэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$, а рёбра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были разного цвета.