Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Среднее арифметическое нескольких чисел — это сумма данных чисел, делённая на их количество. Так, например:

— среднее арифметическое чисел a и b равно $\dfrac{a+b}{2}$;

— среднее арифметическое чисел a, b и c равно $\dfrac{a+b+c}{3}$;

— среднее арифметическое чисел a, b, c и d равно $\dfrac{a+b+c+d}{4}$.

Вообще,

— среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Среднее арифметическое можно вычислять для чисел любого знака. Однако далее, если нет специальных оговорок, мы считаем все рассматриваемые числа неотрицательными. (Дело в том, что сейчас появятся корни, и у нас не будет желания то и дело отвлекаться, следя за знаком подкоренного выражения.)

Что такое **среднее геометрическое**? Начинаем:

— среднее геометрическое чисел a и b равно $\sqrt{ab}$;

— среднее геометрическое чисел a, b и c равно $\sqrt[3]{abc}$;

— среднее геометрическое чисел a, b, c и d равно $\sqrt[4]{abcd}$.

Вообще,

— среднее геометрическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Неравенство Коши

Оказывается, среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \tag{1}$$

причём равенство в (1) достигается лишь в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Неравенство (1) называется *неравенством Коши*.

Мы докажем неравенство Коши для случаев $n = 2, 3, 4$.

Для двух чисел неравенство Коши имеет вид:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{2}$$

Для доказательства составим разность и преобразуем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geqslant 0,$$

причём равенство достигается лишь при $a = b$. Тем самым неравенство (2) доказано.

Из неравенства (2) следует ещё одно важное неравенство. Пусть $a > 0$. Перепишем неравенство (2) в виде

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

и положим тут $b = \frac{1}{a}$. Получим:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2. \qquad (3)$$

Мы видим, таким образом, что *сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше двойки, причём равенство достигается, когда оба они равны единице.*

Теперь докажем неравенство Коши для четырёх чисел. Оно имеет вид:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}\,. \qquad (4)$$

Используем уже доказанное неравенство (2):

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}\,.$$

Неравенство (4) тем самым доказано. Равенство имеет место при $a = b$, $c = d$ и $ab = cd$, то есть при $a = b = c = d$.

Неравенство Коши для трёх чисел имеет вид:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}\,. \qquad (5)$$

Для доказательства положим $d = \sqrt[3]{abc}$ в неравенстве (4):

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[4]{(abc)^{\frac{4}{3}}} = (abc)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{abc}\,,$$

откуда

$$a+b+c \geqslant \sqrt[3]{abc}\,,$$

что и доказывает неравенство (5). Равенство в нём достигается при $a = b = c$.

Нахождение экстремумов

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим может применяться при решении задач на нахождение экстремумов, то есть наибольших и наименьших значений некоторых функций.

Задача 1. Число 10 разбить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Пусть $10 = x+y$. Очевидно, что оба слагаемых x и y должны быть положительными. В силу неравенства (2) имеем:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

то есть $xy \leqslant 25$. Наибольшее значение произведения xy, равное 25, достигается при $x = y = 5$.

Ответ. $10 = 5 + 5$.

Задача 2. Решить уравнение:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 1 + 2x - x^2.$$

Решение. «Страшноватый» вид уравнения говорит о том, что здесь должны применяться какие-то нестандартные методы. И действительно, можно использовать неравенство (3).

Перепишем уравнение в виде:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x-1)^2.$$

Оценим левую часть (ЛЧ) и правую часть (ПЧ) этого уравнения. В силу неравенства (3) имеем ЛЧ $\geqslant 2$. В то же время ясно, что ПЧ $\leqslant 2$. Равенство может иметь место лишь в том случае, когда ЛЧ $= 2$ и ПЧ $= 2$ *одновременно*. Так будет при $x = 1$, и только.

Ответ. 1.

Задача 3. Найти наименьшее значение функции $y = x + \dfrac{32}{x^2}$ при $x > 0$.

Решение. Задача легко решается с помощью следующего трюка:

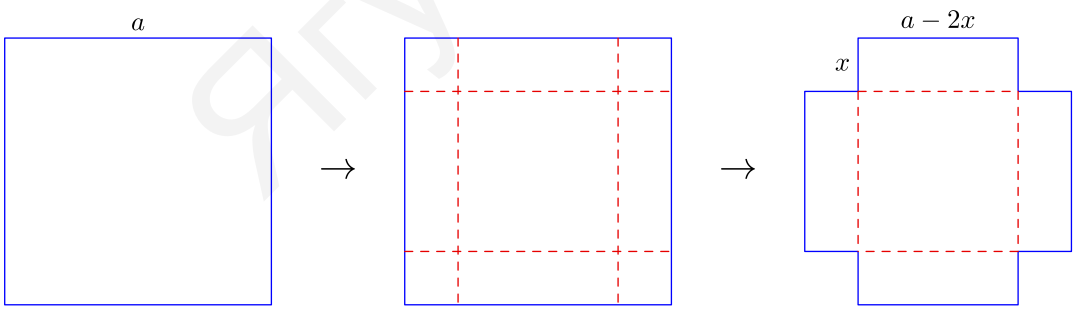
$$y = x + \frac{32}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{32}{x^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{32}{x^2}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

Наименьшее значение $y_{\min} = 6$ достигается при $\frac{x}{2} = \frac{32}{x^2}$, то есть при $x = 4$.

Ответ. 6.

Задача 4. Из квадратного листа жести со стороной a изготавливается коробка в виде прямоугольного параллелепипеда. Для этого в углах листа вырезаются четыре квадратных куска, и получившаяся фигура складывается по линиям разреза. Найти максимально возможный объём такой коробки.

Решение. Поясним процесс изготовления коробки с помощью рисунка:



Сторону вырезаемого квадрата обозначим x. Тогда в основании коробки получается квадрат со стороной $a - 2x$, а высота коробки равна x. Объём коробки:

$$V = x(a-2x)^2.$$

Теперь нужно исхитриться и грамотно использовать неравенство Коши. Для этого запишем объём следующим образом:

$$V = \frac{1}{4}\cdot 4x(a-2x)(a-2x).$$

В результате имеем:

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{4x(a-2x)(a-2x)} \leqslant \frac{4x + (a-2x) + (a-2x)}{3} = \frac{2a}{3}\,,$$

откуда

$$V \leqslant \frac{2a^3}{27}\,.$$

Максимальное значение объёма $V_{\max} = \dfrac{2a^3}{27}$ достигается при $4x = a - 2x$, то есть при $x = a/6$.

Ответ. $\dfrac{2a^3}{27}$.

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1*) Даны три числа a, b, c. Известно, что среднее арифметическое чисел a и b на 5 больше среднего арифметического всех трёх чисел. А среднее арифметическое чисел a и c на 8 меньше среднего арифметического всех трёх чисел. На сколько среднее арифметическое чисел b и c отличается от среднего арифметического всех трёх чисел?

На 3

2. (*Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 5–7*) Средний возраст одиннадцати футболистов — 28 лет. Во время игры один из игроков был удалён и средний возраст оставшихся игроков стал 27 лет. Сколько лет удалённому игроку?

38

3. (*«Ломоносов», 2012, 8*) В некотором городе два района — старый и новый. Средняя высота зданий в старом районе вдвое меньше средней высоты зданий в новом районе и на 30% меньше, чем средняя высота зданий в городе. Найдите отношение количеств зданий в старом и новом районах.

$4:3$

4. (*Всеросс., 2015, II этап, 8*) Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

9

5. (*«Курчатов», 2017, 11*) На доске было выписано несколько чисел, их среднее арифметическое было равно M. К ним дописали число 15, при этом среднее арифметическое вы росло до $M+2$. После этого дописали ещё и число 1, и среднее арифметическое уменьшилось до $M+1$. Сколько чисел было на доске изначально? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

4

6. (*ОММО, 2012*) На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

150

7. (*«Ломоносов», 2009*) На сколько одно из положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $3\sqrt{2}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{2}$?

$\boxed{\text{На } 8}$

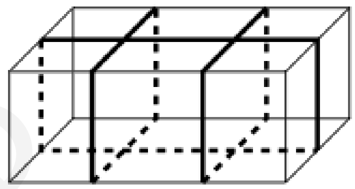
8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x,y) = \frac{2015(x+y)}{\sqrt{2015x^2 + 2015y^2}}$$

и укажите все пары (x, y), при которых оно достигается.

$\boxed{-\sqrt{4030} \text{ при } x = y < 0}$

9. (*ОММО, 2012*) Посылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперек (см. рисунок). Можно ли отправить посылку объема 37 дм^3, имея 3,6 м веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?



$\boxed{\text{Нет}}$

10. (*«Высшая проба», 2017, 10–11.5*) Числа $P_1, \ldots, P_n$ являются перестановкой чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из 1, …, n и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$