

Теорема Карно

Важную роль в геометрии играют необходимые и достаточные условия того, что три прямые пересекаются в одной точке. Одним из таких критериев служит *теорема Карно*.

ТЕОРЕМА КАРНО. Перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 и C_1 на прямые BC , CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AB_1^2 - B_1C^2 + CA_1^2 - A_1B^2 + BC_1^2 - C_1A^2 = 0.$$

ЗАДАЧА 1. Докажите, что $AX^2 - BX^2 = AY^2 - BY^2$ в том и только в том случае, если прямые AB и XY перпендикулярны.

ЗАДАЧА 2. (Поляра) Внутри окружности с центром O взята точка A . Докажите, что геометрическим местом точек пересечения касательных, проведённых к окружности в концах всевозможных хорд, проходящих через точку A , является прямая, перпендикулярная OA (эта прямая называется полярной точки A относительно данной окружности).

ЗАДАЧА 3. Докажите теорему Карно.

ЗАДАЧА 4. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три общие хорды этих окружностей проходят через одну точку.

ЗАДАЧА 5. К каждой стороне треугольника провели перпендикуляр в точке касания данной стороны с вневписанной окружностью. Докажите, что три этих перпендикуляра пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 6. Около треугольника ABC описана окружность. Прямая, проходящая через вершину A параллельно BC , пересекает эту окружность в точке A_1 . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1 , B_1 , C_1 опустили перпендикуляры на BC , CA , AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 7. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка X . Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из M на AX , пересекается с перпендикуляром, опущенным из N на CX , в точке P . Докажите, что точка P равноудалена от точек A и C .

Утверждения двух следующих задач вытекают друг из друга с помощью теоремы Карно. Разумеется, одну из них нужно решить без использования этой теоремы.

ЗАДАЧА 8. (ММО, 2011, 8) Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC , и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD , пересекаются в точке P . Докажите, что $PA = PD$.

ЗАДАЧА 9. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Докажите, что $AM^2 - MO^2 = DN^2 - NO^2$.