Векторы в планиметрии

Задача 1. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 10*) Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках A, B, C, D, O, сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

Задача 2. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Дан правильный 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$. Можно ли из 12 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ выбрать семь, сумма которых равна нулевому вектору?

Задача 3. (*OMMO, 2017*) Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

Вне; $\sqrt{3}$

Задача 4. (*OMMO, 2016, 11*) В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

224

Задача 5. (*OMMO, 2015, 9–11*) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2015

Задача 6. (*OMMO, 2014*) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

$\frac{7}{4}$

Задача 7. (*«Ломоносов», 2016, 10–11*) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Задача 8. (*«Высшая проба», 2017, 11.2*) На окружности с центром O расположим шестёрку точек P_1, $\ldots$, P_6. Назовём шестёрку *интересной*, если $\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_6} = 0$ и все углы $\angle P_iOP_j$ целые в градусах. Назовём шестёрку *скучной*, если она переводится в себя отражением от точки O или поворотом вокруг O на $120°$. Существуют ли интересные нескучные шестёрки точек на окружности?

ЯГУ6ОВ.РФ