

Лемма о трезубце

Вспомогательная задача. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , I_A — центр внеписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC .

- 1) Докажите, что точки B, C, I, I_A лежат на одной окружности ω .
- 2) Докажите, что центр P окружности ω является серединой отрезка II_A и расположен на описанной окружности треугольника ABC .

Из этой задачи непосредственно вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА О ТРЕЗУБЦЕ. Точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, I, I_A .

Лемма о трезубце называется также *теоремой о трилистнике*.

ЗАДАЧА 1. (*Внешняя лемма о трезубце*) Точка пересечения биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, I_B, I_C . Докажите.

ЗАДАЧА 2. («Ломоносов», 2012, 10–11) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D . Найдите угол B , если $OD = 4AC$.

$$\boxed{\left(\frac{7\pi}{18}\right) \text{ сосл.} = \frac{8}{1} \text{ сосл.} \angle}$$

ЗАДАЧА 3. Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r соответственно.

- 1) Точка I — центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A' . Докажите, что $IA \cdot IA' = 2Rr$.
- 2) Докажите *формулу Эйлера*:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d — расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

ЗАДАЧА 4. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) Дан треугольник ABC . На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B .

ЗАДАЧА 5. (*Всеросс., 2012, финал, 9*) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

ЗАДАЧА 6. (*Всеросс., 2012, финал, 11*) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

ЗАДАЧА 7. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 10–11) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω ($AD \parallel BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD , касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω , не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω .

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2014, финал, 10–11) Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр внеписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .

ЯГубов.РФ