Инверсия

Хорошо известные вам преобразования плоскости — центральная и осевая симметрии, поворот, гомотетия — переводят прямую в прямую, а окружность — в окружность. Ни симметрия, ни поворот, ни гомотетия не могут перевести прямую в окружность или, наоборот, окружность в прямую, и потому с точки зрения указанных преобразований прямая и окружность являются различными объектами.

Существует, однако, замечательное преобразование — инверсия, которое переводит прямую в прямую или окружность, а окружность — в окружность или прямую. Таким образом, с точки зрения инверсии прямая и окружность оказываются одинаковыми объектами.

Определение. Пусть окружность ω имеет центр O и радиус r. Инверсия относительно окружности ω (называемая также также инверсией с центром O и степенью r^2) переводит произвольную точку $M \neq O$ в точку M^*, расположенную на луче OM и такую, что $OM \cdot OM^* = r^2$.

Точка M^* называется *образом* точки M при указанной инверсии. Образ фигуры Φ состоит из образов всех точек M, принадлежащих фигуре Φ.

Инверсия с центром O есть преобразование плоскости с выколотой точкой O (поскольку образ точки O не определён). Тем не менее, мы будем допускать вольность речи и говорить об образе прямой или окружности, проходящей через O.

Простейшие свойства инверсии легко следуют непосредственно из определения.

1. Окружность ω остаётся на месте (каждая её точка переходит сама в себя).
2. Если точка M лежит внутри окружности ω, то её образ M^* — снаружи; наоборот, если точка M лежит снаружи ω, то M^* — внутри.
3. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит сама в себя.
4. (*Инволютивность*) Если точка M переходит в M^*, то точка M^* переходит в M (иными словами, точки M и M^* являются образами друг друга).

Задача 1. Докажите, что при инверсии с центром O:
1) треугольники OAB и OB^*A^* подобны;
2) точки A, B, A^* и B^* лежат на одной окружности.

Задача 2. Точки A и B лежат на окружности ω. Касательные к окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что P является образом середины хорды AB при инверсии относительно ω.

Задача 3. Докажите следующие свойства инверсии с центром O.
1) Образ прямой, не проходящей через O, есть окружность, проходящая через O.
2) Образ окружности, проходящей через O, есть прямая, не проходящая через O.
3) Образ окружности, не проходящей через O, есть окружность, не проходящая через O.

Задача 4. Точки A и B лежат на окружности ω. Что является образом прямой AB при инверсии относительно ω?

Задача 5. Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

Задача 6. Инверсия относительно окружности ω оставляет окружность γ на месте. Что можно сказать о взаимном расположении этих окружностей?

Задача 7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1.

а) Что является образом прямой A_1B_1 при инверсии с центром C, которая переводит точку A_1 в точку B?

б) Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Окружность, описанная около треугольника CBB_1, пересекает высоту AA_1 в точке Z. Докажите, что $CX = CY = CZ$.

Задача 8. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 9.8*) Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность Ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром окружности, вписанной в треугольник PQT.

Задача 9. (*Турнир городов, 2004, 8–9*) Две окружности пересекаются в точках A и B. Их общая касательная (та, которая ближе к точке B) касается окружностей в точках E и F. Прямая AB пересекает прямую EF в точке M. На продолжении AM за точку M выбрана точка K так, что $KM = MA$. Прямая KE вторично пересекает окружность, содержащую точку E, в точке C. Прямая KF вторично пересекает окружность, содержащую точку F, в точке D. Докажите, что точки C, D и A лежат на одной прямой.

Задача 10. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность Ω_1 треугольника AOC проходит через середину диагонали BD. Докажите, что описанная окружность Ω_2 треугольника BOD проходит через середину диагонали AC.

Задача 11. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 9.4*) Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B, C, проходящие через H, имеют общую касательную.

Задача 12. (*Поляра*)

1) Внутри окружности ω с центром O взята точка A. Докажите, что геометрическим местом точек пересечения касательных, проведённых к окружности ω в концах всевозможных хорд, проходящих через точку A, является прямая, перпендикулярная OA.

2) Указанная прямая называется *полярой* точки A относительно окружности ω. Дайте определение поляры на языке инверсии. Что даёт это определение в случае, когда A лежит вне окружности ω?

Задача 13. Покажите, что если точка B лежит на поляре точки A относительно окружности ω, то точка A лежит на поляре точки B относительно ω.

Задача 14. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что:

- его диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1;$$
- прямые AF, BE и CD пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{ED}{DA} = 1.$$

Задача 15. Через точку T, лежащую вне окружности ω, проведены две секущие к этой окружности. Докажите, что

а) диагонали полученного вписанного четырёхугольника,

б) продолжения двух его сторон, не лежащих на секущих,

пересекаются на поляре точки T относительно ω.

Задача 16. Диагонали четырёхугольника, вписанного в окружность ω, пересекаются в точке S. Докажите, что продолжения противоположных сторон этого четырёхугольника пересекаются на поляре точки S относительно ω.

Задача 17. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке $E \neq O$. Описанные окружности треугольников AOB и COD вторично пересекаются в точке K. Докажите, что угол OKE прямой.

Задача 18. (*Теорема о симметричной бабочке*) Через точки A и B, расположенные на окружности с центром O, проведены касательные, пересекающиеся в точке P. Прямая, проходящая через P и не проходящая через O, пересекает окружность в точках K и L. Точки K' и L' симметричны точкам K и L относительно прямой PO. Докажите, что прямые $K'L$ и KL' пересекаются в середине хорды AB.

Задача 19. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 9.7*) Пусть O – одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Окружность ω с центром O пересекает ω_1 в точках A и B, а ω_2 — в точках C и D. Пусть X — точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что все такие точки X лежат на одной прямой.

Задача 20. Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются в точке P, а продолжения боковых сторон — в точке T. Докажите, что P и T инверсны:

а) относительно окружности, диаметром которой служит отрезок, соединяющий середины оснований трапеции;

б) относительно окружности, описанной около трапеции.

Задача 21. (*Всеросс. по геометрии, 2013*) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями вершин B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

Задача 22. Окружность Ω проходит через центр окружности ω и пересекает её в точках A и B. Общие касательные к этим окружностям пересекаются в точке C. Докажите, что при инверсии относительно ω описанная окружность треугольника ABC переходит в окружность, симметричную ω относительно AB.

Задача 23. (*Всеросс., 2013, финал, 11.8*) В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ, касаются.

Задача 24. Четырёхугольник описан около окружности. Покажите, что образами вершин четырёхугольника при инверсии относительно этой окружности служат вершины параллелограмма.

Задача 25. (*Всеросс. по геометрии, 2014*) Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

Задача 26. Окружность ω с центром I касается сторон AB, BC, CD, DA четырёхугольника $ABCD$ в точках K, L, M, N соответственно.

1) Докажите, что если прямые AB, CD и LN пересекаются в одной точке, то прямые AD, BC и KM также пересекаются в одной точке.

2) Докажите, что радикальная ось окружности ω и описанной окружности γ треугольника AID проходит через середины отрезков KN и MN.

Задача 27. (*Всеросс. по геометрии, 2014*) В четырёхугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке S. Описанные окружности Ω и Ω_1 треугольников AED и BFC вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.

Задача 28. (*Турнир городов, 2005, 10–11*) Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Доказать, что углы AOE и DOF равны.

Задача 29. (*Турнир городов, 2011, 10–11*) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Задача 30. (*Всеросс. по геометрии, 2006, 10.3*) Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.