

Условный экстремум

В предыдущем листке «Область значений функции» мы, в частности, выяснили, как в некоторых случаях найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$. Сейчас мы рассмотрим более общую ситуацию: нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $f(x, y)$ при дополнительном условии, что эти переменные связаны друг с другом теми или иными соотношениями. Это и есть задача на *условный экстремум*¹.

Задача 1. Найти наименьшее расстояние от начала координат до точек прямой $3x + 2y = 1$.

Решение. Расстояние от начала координат до точки (x, y) равно $\sqrt{x^2 + y^2}$. Вместо минимизации расстояния можно минимизировать его квадрат, поэтому задача ставится так: найти наименьшее значение величины

$$s = x^2 + y^2 \quad (1)$$

при условии

$$3x + 2y = 1. \quad (2)$$

Из (2) выражаем y и подставляем это выражение в (1):

$$s = x^2 + \left(\frac{1 - 3x}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4},$$

то есть

$$13x^2 - 6x + 1 - 4s = 0.$$

Нам нужно найти наименьшее s , при котором данное квадратное уравнение имеет решение. Как это сделать — очевидно:

$$D = 52s - 4 \geq 0,$$

откуда $s \geq \frac{1}{13}$. Следовательно, наименьшее значение s равно $\frac{1}{13}$, а искомое наименьшее расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x + 2y$, если x и y удовлетворяют условию $3x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 5$.

Решение. Нам нужно найти наибольшее и наименьшее значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ 3x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 5 \end{cases} \quad (3)$$

имеет решения.

Удобно из равенства системы (3) выразить $2y$:

$$2y = a - x, \quad (4)$$

и подставить в неравенство этой системы:

$$3x^2 - x(a - x) + (a - x)^2 \leq 5,$$

¹Вообще, нахождение условных экстремумов функций нескольких переменных — классическая тема высшей математики. Однако некоторые задачи вам доступны уже сейчас!

то есть

$$5x^2 - 3ax + a^2 - 5 \leq 0. \quad (5)$$

Данное неравенство имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$D = -11a^2 + 100 \geq 0,$$

откуда

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} \leq a \leq \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

При таких и только при таких a ввиду (4) будет иметь решения и система (3). Следовательно, наибольшее из подходящих a равно $\frac{10}{\sqrt{11}}$, а наименьшее равно $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{11}}$ и $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Задача 3. (МГУ, геологич. ф-т, 2007) Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 2 = z + y, \\ xy + z^2 + 22 - 9z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

Решение. Найдём сначала множество возможных значений z . Именно, воспринимаем z как параметр и ищем, при каких z данная система имеет решения относительно x и y .

Выражаем y из первого уравнения:

$$y = x - z + 2, \quad (6)$$

и подставляем во второе. После преобразований получим:

$$x^2 + (2 - z)x + z^2 - 9z + 22 = 0.$$

Чтобы это квадратное уравнение имело корни, его дискриминант должен быть неотрицательным:

$$D = -3z^2 + 32z - 84 \geq 0,$$

откуда

$$\frac{14}{3} \leq z \leq 6. \quad (7)$$

Ввиду (6) заключаем, что исходная система имеет решения, если и только если z принадлежит отрезку (7).

Теперь перепишем нашу систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x - y = z - 2, \\ xy = 9z - z^2 - 22. \end{cases}$$

Теперь имеем:

$$s = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (z - 2)^2 + 2(9z - z^2 - 22),$$

то есть

$$s = -z^2 + 14z - 40. \quad (8)$$

Графиком функции $s(z)$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы равна 7, поэтому на отрезке (7) функция (8) является возрастающей и достигает наибольшего значения на правом конце этого отрезка:

$$s_{\max} = s(6) = 8.$$

Ответ: 8 при $z = 6$.

Задача 4. («Ломоносов», 2007) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

Решение. Добавим для удобства к нашему множеству его границу (искомый угол от этого не изменится). Таким образом, мы имеем дело с фигурой S , заданной на координатной плоскости нестрогим неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 \leq 0. \quad (9)$$

Расположение и вид фигуры S схематически показаны на рис. 1. Мы ищем угол φ между двумя «крайними» прямыми, проходящими через точки фигуры S и начало координат².

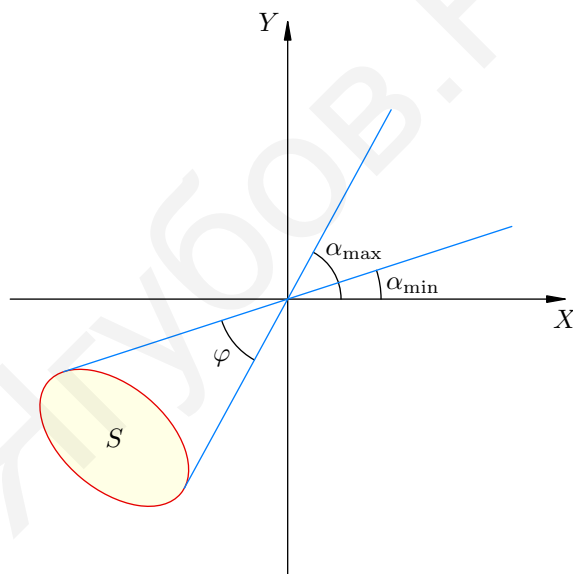


Рис. 1. К задаче 4

Покажем прежде всего, что фигура S целиком расположена в третьей четверти (как это и показано на рисунке). Неравенство (9) является квадратным по y :

$$y^2 + (x + 2)y + 14x^2 + 14x + 4 \leq 0. \quad (10)$$

Для всех точек фигуры S дискриминант квадратного трёхчлена (10) неотрицателен:

$$D = -55x^2 - 52x - 12 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 55x^2 + 52x + 12 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{6}{11} \leq x \leq -\frac{2}{5}.$$

²На самом деле фигура S — это эллипс с внутренними точками, а ищем мы угол между двумя касательными к эллипсу, проходящими через начало координат. Распознавать эллипс и другие кривые второго порядка вы научитесь в вузовском курсе аналитической геометрии.

Аналогично, неравенство (9) является квадратным по x :

$$14x^2 + (y + 14)x + y^2 + 2y + 4 \leq 0,$$

и дискриминант его также неотрицателен:

$$D = -55y^2 - 84y - 28 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-42 - \sqrt{224}}{55} \leq y \leq \frac{-42 + \sqrt{224}}{55}.$$

Мы видим, что проекциями фигуры S на координатные оси X и Y служат соответственно отрезки $[-\frac{6}{11}; -\frac{2}{5}]$ и $[\frac{-42 - \sqrt{224}}{55}; \frac{-42 + \sqrt{224}}{55}]$, расположенные на отрицательных полуосях. Значит, фигура S действительно находится целиком в третьей четверти, и поэтому видна из начала координат под острым углом.

Теперь заметим, что для каждой точки (x, y) фигуры S отношение y/x есть тангенс угла α между прямой, соединяющей эту точку с началом координат, и осью X . На рис. 1 показан наибольший $\alpha_{\max}$ и наименьший $\alpha_{\min}$ из углов α ; их разность

$$\varphi = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$$

и есть искомый угол.

Таким образом, нас интересует наибольшее и наименьшее значение величины

$$k = \frac{y}{x}$$

при условии, что x и y связаны неравенством (9). Подставляя $y = kx$ в неравенство (9), получим:

$$(k^2 + k + 14)x^2 + (2k + 14)x + 4 \leq 0.$$

При фиксированном k это неравенство задаёт отрезок значений x для тех точек фигуры S , которые лежат на прямой $y = kx$. Дискриминант должен быть неотрицательным:

$$D = -3k^2 + 10k - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq \frac{7}{3}.$$

Теперь находим:

$$\alpha_{\max} = \arctg \frac{7}{3}, \quad \alpha_{\min} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$\varphi = \arctg \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\arctg \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Задачи

1. (МГУ, ВМК, 1986) Найти координаты точки, лежащей на прямой $-4x - 3y = 25$ и наименее удалённой от начала координат.

$$\boxed{(-4, -3)}$$

2. (МГУ, физический ф-т, 1995) Найти наименьшее значение xy при условии

$$\begin{cases} x + y = 3a - 1, \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2. \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{01}{6}}$$

3. (МГУ, ВМК, 2006) Пусть (x, y) — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = \alpha + 2, \\ 9x^2 + y^2 = 5\alpha - 2. \end{cases}$$

При каком α произведение xy принимает наибольшее значение?

$\frac{4}{3} = \alpha$

4. (МГУ, ВШБ, 2004) Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y , удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

01

5. (МГУ, ф-т психологии, 1986) Найти наименьшее значение суммы $x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

6. (МГУ, географич. ф-т, 2001) Найти наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 4y^2 - z^2 + 6x + 4yz$$

при условии, что числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию, а числа $x - z, z - y, 2x$ — геометрическую.

6-

7. (МГУ, химический ф-т, 1997) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$ при условии

$$x^2 - xy + 2y^2 = 1.$$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} - 8$ и $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 8$

8. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005) Переменные x, y связаны условием

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0.$$

Найдите все значения параметра a , при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

$\frac{2}{3}\sqrt{2} < |a|$

9. (МГУ, биологический ф-т, 1989) Числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

$\frac{2}{3}\sqrt{2}$

10. (МГУ, геологич. ф-т, 2007) Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

$$\boxed{z = z \text{ или } 8}$$

11. («Ломоносов», 2007) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 < 0.$$

$$\boxed{\frac{11}{z} \arctan \frac{y}{x}}$$

12. (МГУ, ВМК, 1993) Найти все пары (a, b) , при которых точка с координатами, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} a^2x - y = 2a^2 - 2b, \\ x - by = 2 - 2a^2, \\ y = 2 - x, \end{cases}$$

наименее удалена от точки $(3; -1)$.

$$\boxed{1 - z^p = q \wedge \exists v : 0 = q = v}$$

13. (МГУ, ВМК, 2000) Найти наибольшее значение выражения

$$14x^2 + 40x + y - 324,5$$

при условиях

$$4x^2 + 20x + y \geq 162 \quad \text{и} \quad 20x^2 - 80x + y \leq 8.$$

$$\boxed{0\text{E}}$$

14. (МГУ, мехмат, 2002) Найдите минимальное значение выражения $(x + y - z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств

$$1 \leq (x + y)^2 \leq \frac{4}{3}, \quad 8 \leq (y + z)^2 \leq 9, \quad 10 \leq (z + x)^2 \leq 11.$$

$$\boxed{\frac{y}{z(11^{\wedge}-8^{\wedge}+8)}}$$

15. (МГУ, ИСАА, 2004) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{y^2}{25} + \frac{\omega^2}{144},$$

если величины x, y, z, ω удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0, \\ z^2 + \omega^2 - 2\omega - 143 = 0, \\ x\omega + yz - x + \omega + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

$\frac{08}{109} \mp \frac{0098}{107}$
