

Уравнения высших порядков

Содержание

1	Непосредственная группировка	1
2	Подбор корня	2
3	Формулы Виета для кубического уравнения	5
4	Задачи	6

Методы решения уравнений третьей и четвёртой степени (формула Кардано и метод Феррари) выходят за рамки программы обычной школы. Поэтому если на олимпиаде вам попадается уравнение степени 3 или выше, то следует искать искусственный приём, приспособленный для решения именно этого уравнения. Таким приёмом может быть, например, удачная группировка с последующим разложением на множители или выявление устойчивых выражений с соответствующей заменой переменной.

Данная статья посвящена уравнениям вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен третьей степени и выше, и некоторым приёмам разложения такого многочлена на множители.

1 Непосредственная группировка

В простейших случаях многочлен удаётся разложить на множители, удачно группируя друг с другом слагаемые.

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x^2(2x - 3) - 4(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

ОТВЕТ: $3/2, \pm 2$.

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Группируем первое слагаемое с четвёртым, а второе — с третьим:

$$(x^3 + 8) - (3x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 4) = 0.$$

ОТВЕТ: $-2, 1, 4$.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решите уравнение

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36}{\sqrt{x + 3}} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Если поддасться искушению раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (тем более что сократится $18x$), то в возникшем кубическом уравнении придётся подбирать корень с целью разложить левую часть на множители. Данная процедура описана в следующем пункте и не представляет здесь никаких сложностей, однако необходимости в ней сейчас нет. Дело в том,

что несколько вычурная запись условия содержит подсказку, как именно надо группировать слагаемые. Имеем:

$$\begin{aligned}x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36 &= x(x^2 + 9x) - 2(x^2 + 9x) + 18x - 36 = \\&= (x^2 + 9x)(x - 2) + 18(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 9x + 18) = (x - 2)(x + 3)(x + 6).\end{aligned}$$

Наше уравнение, таким образом, равносильно системе

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 3)(x + 6) = 0, \\ x + 3 > 0, \end{cases}$$

решением которой служит $x = 2$.

ОТВЕТ: 2.

2 Подбор корня

Если $p(x)$ — многочлен, и x_0 — корень уравнения $p(x) = 0$, то имеет место разложение на множители¹:

$$p(x) = (x - x_0)q(x), \quad (1)$$

где $q(x)$ — также некоторый многочлен (степень которого, как легко видеть, на единицу меньше степени многочлена $p(x)$). Зная корень x_0 , мы получаем разложение (1) путём последовательной группировки слагаемых.

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Нетрудно видеть, что непосредственная группировка ничего хорошего не даёт. Однако можно убедиться прямым вычислением, что $x = 2$ — корень данного уравнения, и поэтому левая часть должна иметь вид $(x - 2)q(x)$. Значит, нам нужно последовательно выделять слагаемые, дающие множитель $x - 2$:

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 14x + 12x - 24 = x^2(x - 2) - 7(x - 2) + 12(x - 2).$$

Теперь наше уравнение приобретает вид

$$(x - 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

и легко решается.

ОТВЕТ: 2, 3, 4.

Всё это замечательно, но как подобрать корень? Никакой общей процедуры, к сожалению, не существует. Тем не менее, в важном частном случае уравнения с *целыми* коэффициентами имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2)$$

с целыми коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеет целочисленный корень x_0 , то x_0 является делителем свободного члена a_n .

¹Это следствие *теоремы Безу*, которая гласит, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x - x_0$ равен $p(x_0)$; значит, если x_0 — корень многочлена $p(x)$, то указанный остаток равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку x_0 — корень данного уравнения, имеет место равенство

$$x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -x_0^n - a_1 x_0^{n-1} - a_2 x_0^{n-2} - \dots - a_{n-1} x_0.$$

Как видим, a_n делится на x_0 . Теорема доказана.

Вернёмся к уравнению $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, рассмотренному выше. Делителями свободного члена -24 служат числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$ и ± 24 . Все корни данного уравнения (а именно, 2, 3 и 4) являются целыми числами и находятся среди указанных делителей.

Поэтому, пытаясь решить уравнение (2), мы ищем его корень среди делителей свободного члена (поочерёдно подставляя эти делители в уравнение). Если нам повезёт и один из делителей в самом деле окажется корнем, то мы разложим левую часть (2) на множители и упростим задачу².

ЗАДАЧА 5. («Ломоносов», 2011, 11) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx \quad (3)$$

состоит в точности из чисел -1 и 1 ?

РЕШЕНИЕ. Число $x = 1$ является корнем уравнения (3) в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$3 + a + b = c. \quad (4)$$

Аналогично, $x = -1$ является корнем уравнения (3) тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$1 + a + b = -c. \quad (5)$$

Вычитая из равенства (4) равенство (5), получим $c = 1$. Тогда любое из этих равенств приводит к соотношению $b = -a - 2$. В итоге уравнение (3) принимает вид

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0. \quad (6)$$

Как мы уже знаем, уравнение (6) имеет корни ± 1 , поэтому выделяем множитель $x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 &= \\ &= (x^5 - x^3) + (x^3 - x) + (2x^4 - 2x^2) + (2x^2 - 2) + (ax^2 - a) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (6) имеет вид

$$(x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2) = 0.$$

Множество корней данного уравнения состоит из чисел ± 1 и корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0. \quad (7)$$

При любом a уравнение (7) имеет хотя бы один корень, поскольку функция $y = x^3 + 2x^2 + x + a + 2$ является непрерывной, принимает отрицательные значения при $x \rightarrow -\infty$ и положительные — при $x \rightarrow +\infty$, и, стало быть, при некотором x обращается в нуль. Нам нужно, чтобы корни уравнения (7) не отличались от ± 1 .

²Но может случиться и так, что ни один делитель не подойдёт. Тогда уравнение (2) не имеет целочисленных корней, и придётся искать другие способы решить его. Такие ситуации будут рассмотрены в следующей статье «Замена переменной».

Если $x = 1$ является корнем уравнения (7), то выполнено

$$4 + a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

Это необходимое условие на параметр a ; проверим его достаточность³. Подставляем $a = -6$ в уравнение (7):

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 4) = 0.$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 3x + 4$ не имеет корней, так что $x = 1$ — единственный корень уравнения (7). Следовательно, в случае $a = -6$ (и соответственно $b = 4$, $c = 1$) корни уравнения (3) в самом деле образуют множество $\{-1, 1\}$.

Если же $x = -1$ является корнем уравнения (7), то выполнено

$$a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2.$$

При таком a уравнение (7) принимает вид

$$x^3 + 2x^2 + x = 0$$

и имеет корень $x = 0$ (который соответственно является корнем исходного уравнения (3)). Поэтому значение $a = -2$ нам не подходит.

ОТВЕТ: $a = -6$, $b = 4$, $c = 1$.

ЗАДАЧА 6. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013)x = a^3 + 3a^2 - 6a - 8 \quad (8)$$

есть неотрицательные числа.

РЕШЕНИЕ. Многочлен $a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013$ имеет корень $a = -1$ и раскладывается на множители:

$$a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013 = (a + 1)(a^3 + 2013a^2 + a + 2013).$$

Кубический многочлен в скобках раскладывается на множители непосредственной группировкой:

$$a^3 + 2013a^2 + a + 2013 = (a^2 + 1)(a + 2013).$$

Аналогично раскладывается на множители и правая часть уравнения (8):

$$a^3 + 3a^2 - 6a - 8 = (a^3 - 8) + 3a(a - 2) = (a - 2)(a^2 + 5a + 4) = (a - 2)(a + 1)(a + 4).$$

Таким образом, уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$(a + 1)(a^2 + 1)(a + 2013)x = (a - 2)(a + 1)(a + 4). \quad (9)$$

Если $a = -1$, то уравнение (9) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Решением такого уравнения является любое число (в частности, неотрицательное). Поэтому значение $a = -1$ годится.

Если $a = -2013$, то уравнение (9) принимает вид $0 \cdot x = -2015 \cdot 2012 \cdot 2009$. Такое уравнение не имеет корней. Значит, данное значение a не подходит.

Если $a \neq -1$ и $a \neq -2013$, то уравнение (9) имеет единственное решение

$$x = \frac{(a - 2)(a + 4)}{(a^2 + 1)(a + 2013)}.$$

³О понятиях необходимости и достаточности рассказано в статье «[Необходимые и достаточные условия](#)».

Остаётся найти все те значения a , при которых выполнено неравенство

$$\frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)(a+2013)} \geq 0.$$

Это легко делается методом интервалов.

ОТВЕТ: $(-2013; -4] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Теорема о целочисленном корне, сформулированная выше, относится к уравнению, в котором коэффициент при старшей степени x равен 1. А как быть в общем случае? Имеется соответствующее обобщение данной теоремы, но на практике можно обойтись и без него, просто умножая уравнение на подходящее число и вводя новую переменную.

ЗАДАЧА 7. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Умножим уравнение на 4 (чтобы первое слагаемое стало точным кубом):

$$8x^3 - 12x^2 - 20x + 12 = 0,$$

после чего введём новую переменную $t = 2x$:

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 12 = 0.$$

Непосредственно убеждаемся, что $t = 1$ — корень данного уравнения, и последовательно группируем:

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 - 10t + 12 &= t^3 - t^2 - 2t^2 + 2t - 12t + 12 = \\ &= t^2(t-1) - 2t(t-1) - 12(t-1) = (t-1)(t^2 - 2t - 12). \end{aligned}$$

Отсюда получаем два других корня: $t = 1 \pm \sqrt{13}$, и остаётся лишь найти соответствующие значения x .

ОТВЕТ: $\frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

3 Формулы Виета для кубического уравнения

Предположим, что кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{10}$$

имеет три корня x_1, x_2 и x_3 . Тогда многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Раскроем в этом равенстве скобки и приведём подобные слагаемые:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3. \tag{11}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases} \tag{12}$$

Соотношения (12) называются *формулами Виета* для кубического уравнения (10).

ЗАДАЧА 8. (МГУ, социологич. ф-т, 2003) Определите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0 \quad (13)$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

РЕШЕНИЕ. Запишем формулы Виета для уравнения (13):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15a - a^2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12a, \\ x_1x_2x_3 = 216. \end{cases} \quad (14)$$

Числа x_1 , x_2 и x_3 (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда выполнено равенство $x_2^2 = x_1x_3$ (см. статью «[Геометрическая прогрессия](#)»). В таком случае из третьего уравнения системы (14) находим $x_2^3 = 216$, то есть $x_2 = 6$, и тогда $x_1x_3 = 36$. Подставляя это в первые два уравнения (14), получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15a - a^2 - 6, \\ 6(x_1 + x_2) = 12a - 36, \end{cases}$$

откуда

$$15a - a^2 - 6 = 2a - 6 \Leftrightarrow a^2 - 13a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ или } a = 13.$$

Мы получили *необходимое* условие на параметр a : именно, предположив, что корни образуют геометрическую прогрессию, мы пришли к выводу, что a может принимать лишь значения 0 или 13 (и никакие другие). Но пока не факт, что оба полученных значения годятся, и теперь надо проверить *достаточность*: при каком из этих значений a имеются три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Если $a = 0$, то уравнение (13) принимает вид $x^3 - 216 = 0$; это уравнение имеет единственный корень $x = 6$. Поэтому значение $a = 0$ не годится.

Если $a = 13$, то уравнение (13) принимает вид

$$x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0.$$

Знание корня $x = 6$ облегчает разложение на множители:

$$\begin{aligned} 0 &= (x^3 - 216) - (26x^2 - 156) = (x - 6)(x^2 + 6x + 36) - 26(x - 6) = \\ &= (x - 6)(x^2 - 20x + 36) = (x - 6)(x - 2)(x - 18). \end{aligned}$$

Как видим, уравнение имеет три различных корня 2, 6 и 18, которые образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, значение $a = 13$ нам подходит.

ОТВЕТ: $a = 13$; корни 2, 6, 18.

4 Задачи

1. Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$;

б) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = 0$;

в) $x^3 + 6x^2 - 12x - 8 = 0$;

г) $x^3 + 7x^2 + 21x + 27 = 0$.

9. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решить уравнение

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 10x - 3(x^2 + 7x) - 30}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

8

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) Решить уравнение

$$(6x - 15)^7 = (x - 1)^{14}.$$

7

11. («Ломоносов», 2011, 8) Решите уравнение

$$\frac{x^7 - 1}{x^5 - 1} = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}.$$

1-0

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

0-1-

13. («Ломоносов», 2011, 11) При каких значениях a , b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1 ?

7- = 2 '1- = q '9- = v

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 - 2014a^3 + 2014a^2 - 2014a + 2013)x = a^3 + 5a^2 + 2a - 8$$

есть неотрицательные числа.

(-4;-2] ∪ {1} ∪ [2013; +∞)

15. («Физтех», 2013, 9–11) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0.$$

9-

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

Одна точка с абсциссой $\frac{1}{3}$

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Какие значения может принимать выражение $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3 - 2015x + 2016 = 0$?

2015

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a - 3)^3 = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

Если $a = 2$, то $x_1 = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_3 = 1$; если $a = 4$, то $x_1 = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{4}{3}}$, $x_2 = \frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{3}}$, $x_3 = 1$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнения

$$x^3 + (8 + b)x^2 + (b + 4)x + (c + 3) = 0,$$

которые являются корнями уравнения

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

$a = 9, b = -5, c = -6$

20. (МГУ, социологич. ф-т, 2003) Определите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

$a = 8, 4, 2$ и корни $2, 4, 8$

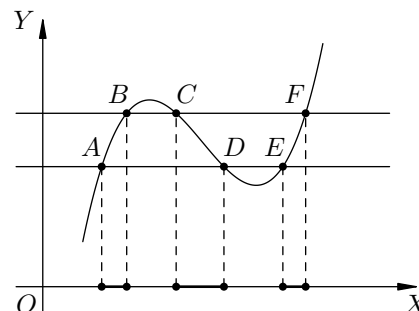
21. (Всеросс., 2017, МЭ, 11.1) Имеет ли отрицательные корни уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0?$$

22. (Всеросс., 1998, финал, 10) Прямые, параллельные оси OX , пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d :$$

первая — в точках A, D и E , вторая — в точках B, C и F (см. рисунок). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось OX равна сумме длин проекций дуг AB и EF .



23. («Ломоносов», 2014, 8–9) Известно, что x_1, x_2, x_3 — различные корни уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Составьте уравнение наименьшей степени, корнями которого являются числа $\frac{x_1+1}{x_1-1}$, $\frac{x_2+1}{x_2-1}$ и $\frac{x_3+1}{x_3-1}$.

$$0 = 1 - \tau - \varepsilon^{\tau} \varepsilon^{\tau}$$

24. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

$$4025$$

25. (ММО, 2016, 10) Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

$$9$$