

Функции в уравнениях и неравенствах. 1

Содержание

1	Монотонность	1
2	Симметрия, периодичность	2
3	Задачи	4

В данной статье рассматриваются уравнения и неравенства, при решении которых используются различные свойства функций: монотонность, симметрия графика, периодичность.

1 Монотонность

Монотонно возрастающая (убывающая) функция принимает каждое своё значение ровно один раз. Этот факт можно использовать следующим образом: *подбираем* корень соответствующего уравнения, а потом из соображений монотонности *доказываем*, что других корней нет.

ЗАДАЧА 1. (МГУ, ВМК, 1991) Решить уравнение

$$\sqrt{x+4} + x - 2 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Разумеется, не представляет труда решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Но возможен и ещё один способ — самый простой в этой ситуации.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+4} + x - 2$ с областью определения $E = [-4; +\infty)$. Заметим, что $f(0) = 0$, так что $x = 0$ — корень нашего уравнения. Будучи суммой двух монотонно возрастающих функций $y = \sqrt{x+4}$ и $y = x - 2$, функция f также является монотонно возрастающей на множестве E . Следовательно, ни при каких значениях x , кроме нуля, функция f в нуль не обращается. Поэтому других корней, кроме нуля, наше уравнение не имеет.

ОТВЕТ: 0.

ЗАДАЧА 2. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} < x + 4.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем данное неравенство в виде $f(x) < 0$, где

$$f(x) = \sqrt{2-x} + (-x - 4).$$

Областью определения функции f является множество $E = (-\infty; 2]$. Будучи суммой двух монотонно убывающих функций $y = \sqrt{2-x}$ и $y = -x - 2$, функция f монотонно убывает на множестве E . Заметим, что $f(-2) = 0$; следовательно, неравенство $f(x) < 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} x > -2, \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2.$$

ОТВЕТ: $(-2; 2]$.

ЗАДАЧА 3. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - 1 \leq -x|x-2| - 4x.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем наше неравенство в виде $f(x) \leq 1$, где

$$f(x) = \sqrt{x+1} + x|x-2| + 4x.$$

Функция $g(x) = \sqrt{x+1}$ монотонно возрастает на своей области определения $E = [-1; +\infty)$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = x|x-2| + 4x = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \leq 2; \\ x^2 + 2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Функция $y = 6x - x^2$ монотонно возрастает при $x \leq 3$ (и, в частности, при $x \leq 2$), а функция $y = x^2 + 2x$ монотонно возрастает при $x \geq -1$ (и, в частности, при $x > 2$); поэтому функция h монотонно возрастает на всей числовой прямой (для наглядности постройте график $y = h(x)$). Значит, функция $f(x) = g(x) + h(x)$ монотонно возрастает на множестве E . Замечая, что $f(0) = 1$, приходим к выводу, что наше неравенство $f(x) \leq 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

ОТВЕТ: $[-1; 0]$.

Замечание. Обратите внимание, сколь существенной оказалась группировка второго и третьего слагаемого функции f с объединением их в функцию h . Рассмотрение трёх слагаемых по отдельности не привело бы к цели: первое и третье являются монотонно возрастающими функциями, однако второе ($y = x|x-2|$) — нет!

2 Симметрия, периодичность

Перейдём к задачам, в которых существенную роль играет какая-либо симметрия графика функции или её периодичность.

ЗАДАЧА 4. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Решите уравнение $f(\sqrt{x+4}) = f(2x)$, где $f(t) = 2t - t^2$ при всех действительных t .

РЕШЕНИЕ. Парабола $y = 2t - t^2$ симметрична относительно прямой $t = 1$, поэтому значения этой функции в точках t_1 и t_2 могут совпадать в двух случаях — если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки $t = 1$:

$$f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2, \\ \frac{t_1 + t_2}{2} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем:

$$f(\sqrt{x+4}) = f(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} = 2x, \\ \sqrt{x+4} + 2x = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} x+4 = 4x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{65}}{2}.$$

Второе уравнение совокупности (1) имеет корень $x = 0$, который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

ОТВЕТ: $0, \frac{1+\sqrt{65}}{8}$.

ЗАДАЧА 5. (МГУ, химический ф-т, 1989) Решить уравнение

$$(2x + 1) \left(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3} \right) + 3x \left(2 + \sqrt{9x^2 + 3} \right) = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение имеет вид

$$f(2x + 1) + f(3x) = 0, \quad (2)$$

где

$$f(t) = t \left(2 + \sqrt{t^2 + 3} \right).$$

Функция f определена на всей числовой прямой и является нечётной: $f(-t) = -f(t)$. При $t > 0$ функция f монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций $y = t$ и $y = 2 + \sqrt{t^2 + 3}$, принимающих только положительные значения. Ввиду своей нечётности функция f монотонно возрастает поэтому и при $t < 0$.

Пусть для чисел a и b выполнено равенство $f(a) + f(b) = 0$, то есть $f(b) = -f(a)$. Поскольку $f(-a) = -f(a)$, имеем $f(b) = f(-a)$, что ввиду монотонности функции f эквивалентно $b = -a$ или $a + b = 0$. Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению

$$2x + 1 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{5}.$$

ОТВЕТ: $-\frac{1}{5}$.

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение

$$f(2x + 16) + 23 = 5f(x). \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ. Обе части уравнения (3) являются функциями, периодическими с периодом 8 (левая часть периодична даже с периодом 4, но это не важно). В силу указанной периодичности множество корней этого уравнения (если оно непустое) распадается на серии, в каждой из которых любые два корня отличаются на целое число, кратное 8. Значит, нам достаточно найти корни уравнения (3) на отрезке $[0; 8]$, после чего все корни найдутся путём прибавления к найденным значениям слагаемого $8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $t = 2x + 16$. Имеем два различных случая расположения переменной x на рассматриваемом отрезке $[0; 8]$.

1. Если $x \in E_1 = [0; 4]$, то $t \in [16; 24]$, и тогда

$$f(2x + 16) = f(t) = 8(t - 16) - (t - 16)^2 = 8 \cdot 2x - (2x)^2 = 16x - 4x^2.$$

Уравнение (3) принимает вид

$$16x - 4x^2 + 23 = 5(8x - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 24x + 23 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = 23. \end{cases}$$

Множеству E_1 принадлежит только $x = 1$.

2. Если $x \in E_2 = [4; 8]$, то $t \in [24; 32]$, и тогда

$$f(2x + 16) = f(t) = 8(t - 24) - (t - 24)^2 = 8(2x - 8) - (2x - 8)^2 = -4x^2 + 48x - 128.$$

Теперь уравнение (3) принимает вид

$$-4x^2 + 48x - 128 + 23 = 5(8x - x^2) \Leftrightarrow x^2 + 8x - 105 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = -15. \end{cases}$$

Множеству E_2 принадлежит только $x = 7$.

Итак, на отрезке $[0; 8]$ уравнение (3) имеет два корня: $x = 1$ и $x = 7$. Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из двух серий: $1 + 8n$ и $7 + 8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ОТВЕТ: $1 + 8n$, $7 + 8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3 Задачи

1. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Дана функция

$$y(x) = |x - 3| + |2x - 4| + 1.$$

- 1) Найти наименьшее значение функции $y(x)$.
- 2) Решить неравенство $y(x) > 8$.

$$(\infty + ; \frac{8}{5}) \cap (0; \infty -) \quad (2; 2) \quad (1$$

Монотонность

2. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) Решить уравнение: $\sqrt{5x - 6} + x = 4$.

$$2$$

3. (МГУ, химический ф-т, 1996) Решить неравенство: $\sqrt{x + 5} > 7 - x$.

$$(\infty + ; 4)$$

4. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) Решить неравенство: $\sqrt{x - 1} < 3 - x$.

$$(2; 1]$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9) Решите уравнение

$$(\sqrt{x})^{2016} + (\sqrt{1 - x})^{2016} = 1.$$

$$1; 0$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1 + x^2)(1 + x^4) + y(1 + y^2)(1 + y^4) = 0, \\ xy + 1000 = 0. \end{cases}$$

$$(\underline{01} \wedge \underline{01} \wedge \underline{01} \wedge \underline{01} -) : (\underline{01} \wedge \underline{01} - \wedge \underline{01} \wedge \underline{01})$$

7. («Ломоносов», 2014, 9) Решите уравнение

$$(x^2 - 7x) \cdot \sqrt[2013]{(x^2 - 7x)^2 + 1} + (2x + 6) \cdot \sqrt[2013]{(2x + 6)^2 + 1} = 0.$$

8.7

8. («Высшая проба», 2012, 9) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 1$$

больше $1/8$.

9. («Высшая проба», 2012, 10) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 2$$

больше $1/14$.

10. (МФТИ, 2004) Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{6-3\sqrt{6+x-x^2}} > \frac{1}{1+|x-1|}.$$

8.7

11. (МГУ, мехмат, 2001) Решите уравнение

$$3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2|.$$

9

12. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x.$$

8.7

13. («Ломоносов», 2011, 10–11) Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2}?$$

8.7

14. (ОММО, 2010) Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[5]{3-x^3-x}$.

1

15. (ОММО, 2010) Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = 2^{-x^3-x} - 5$.

1-

16. (МГУ, ВМК, 2001) Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2f(x^2 - 2x - 112) + |f(x^2 - 2x - 112) - 3f(-2x\sqrt{32 - 2x})|}{(3f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112) - 2f(-2x\sqrt{32 - 2x}))^7} > 0.$$

$$\left(8^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{-81}\right)$$

Симметрия, периодичность

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Решите уравнение $f(\sqrt{x+9}) = f(3x)$, где $f(t) = 3t - t^2$ при всех действительных t .

$$\frac{81}{928\sqrt{+1}} \cdot 0$$

18. (МГУ, химический ф-т, 1989) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

$$\frac{8}{1}$$

19. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1, такая, что $f(x) = x^2$ при $x \in [0; 1)$. Решите уравнение

$$f(2x+5) + 2f(x) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u + \frac{8}{2} \cdot u + \frac{9}{1}$$

20. (МГУ, экономич. ф-т, 1997) Функция f определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $0 \leq x \leq 2$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 1 - |x - 1|$. Решить уравнение

$$2f(x)f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u, u, u + \frac{7}{1} - \frac{7}{1} + 4u, u, u + \frac{7}{1} - \frac{7}{1}$$

21. (МГУ, экономич. ф-т, 1997) Функция f определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \leq x \leq 0$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение

$$\frac{2f(-3-x)-3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)}-\sqrt{2}}=0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u, u + \frac{7}{1} -$$

22. («Ломоносов», 2014, 10–11) Дана функция $f(x) = ||x + 2| - 4|$. Сколько корней имеет уравнение

$$f(f(\dots f(f(x))\dots)) = 1,$$

в котором функция f берётся 2014 раз?

4032

23. (Всеросс., 2016, регион, 10) Найдите все такие пары различных действительных чисел x и y , что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$.

(2, 0); (0, 2)