Угол между скрещивающимися прямыми

Скрещивающиеся прямые не пересекаются. Можно ли в таком случае говорить об угле между ними? Оказывается, можно.

Угол между пересекающимися прямыми

Вспомним сначала, что такое угол между пересекающимися прямыми. Пусть прямые a и b пересекаются (рис. 1). При этом образуются четыре угла. Если все углы равны друг другу, то прямые a и b называются *перпендикулярными* (левый рисунок), и угол между этими прямыми равен $90°$. Если не все углы равны друг другу (то есть образуются два равных острых угла и два равных тупых угла), то углом между прямыми a и b называется *острый* угол φ (правый рисунок).

Рис. 1. Угол между пересекающимися прямыми

Определение угла между скрещивающимися прямыми

Теперь введём понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмём в пространстве произвольную точку M. Дальнейшие действия зависят от того, принадлежит точка M одной из наших прямых или нет.

1. Пусть точка M не принадлежит ни прямой a, ни прямой b. Проведём через M прямую a', параллельную a, и прямую b', параллельную b (рис. 2). Прямые a' и b' пересекаются; тогда угол φ между этими прямыми и называется углом между прямыми a и b.

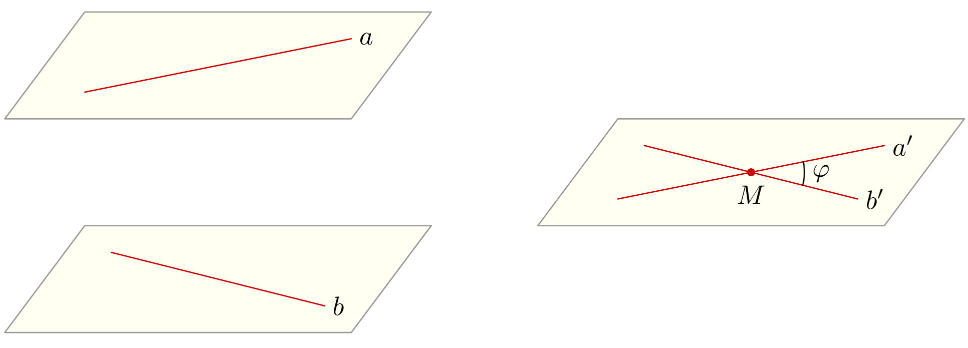

Рис. 2. Угол между скрещивающимися прямыми

Таким образом, *угол между скрещивающимися прямыми a и b — это угол между пересекающимися прямыми a' и b', такими, что $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$.*

2. Пусть точка M принадлежит одной из прямых; например, пусть $M \in a$. Проведём через точку M прямую b', параллельную b (рис. 3). Прямые a и b' пересекаются; угол φ между этими прямыми и называется углом между прямыми a и b.

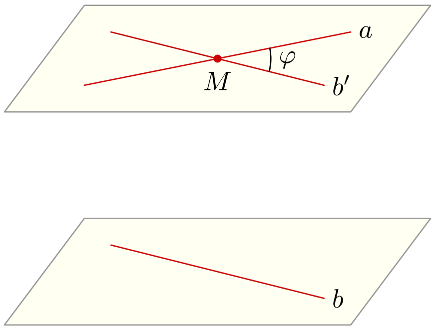

Рис. 3. Угол между скрещивающимися прямыми

Итак, *угол между скрещивающимися прямыми a и b — это угол между прямой a и прямой b', параллельной b и пересекающей a.*

Можно показать, что определение угла между скрещивающимися прямыми является корректным, то есть не зависит от конкретного выбора точки M (иными словами, как точку M не выбирай, угол φ всегда получится одним и тем же). Поэтому в задачах выбор точки M диктуется исключительно соображениями удобства.

Примеры решения задач

Разберём три задачи, расположенные по возрастанию сложности. Третья задача сопоставима с задачами C2, предлагающимися на ЕГЭ по математике.

Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми: а) A_1C_1 и BD; б) A_1B и B_1C.

Решение. Делаем чертёж (рис. 4). Прямые, угол между которыми надо найти, изображены красным цветом.

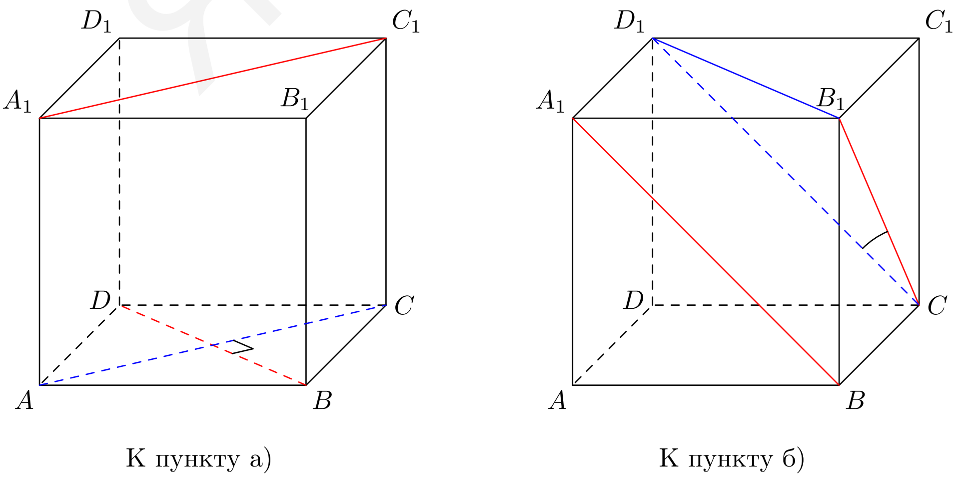

Рис. 4. К задаче 1

а) Проведём $AC \parallel A_1C_1$. Угол между прямыми A_1C_1 и BD есть угол между прямыми AC и BD. Но $AC \perp BD$ как диагонали квадрата. Поэтому $A_1C_1 \perp BD$.

б) Проведём $D_1C \parallel A_1B$. Угол между прямыми A_1B и B_1C есть угол между прямыми D_1C и B_1C (то есть угол D_1CB_1). Треугольник D_1CB_1 равносторонний: $D_1C = CB_1 = B_1D_1$ как диагонали равных квадратов, являющихся гранями куба. Следовательно, $\angle D_1CB_1 = 60°$.

Ответ: а) $90°$; б) $60°$.

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка M — середина ребра SB. Найдите угол между прямыми CM и SO, где O — центр основания пирамиды.

Решение. Пусть N — середина отрезка BO (рис. 5). Тогда MN — средняя линия треугольника SBO. Следовательно, $MN \parallel SO$, и потому искомый угол есть $\varphi = \angle CMN$.

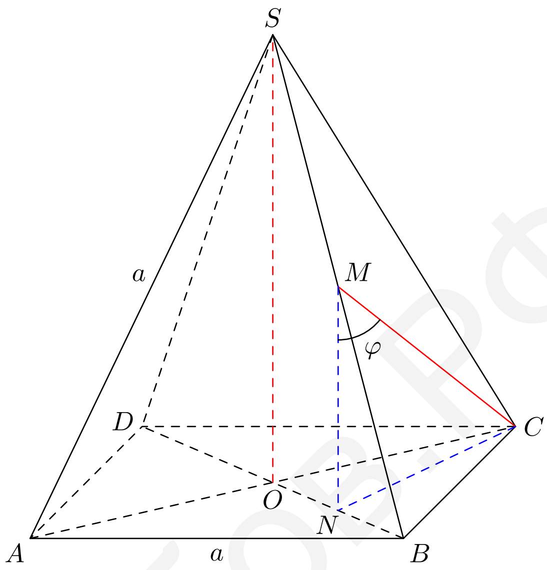

Рис. 5. К задаче 2

Поскольку SO перпендикулярна плоскости основания, MN также перпендикулярна этой плоскости. Стало быть, треугольник CMN — прямоугольный с гипотенузой CM.

Пусть каждое ребро пирамиды равно a. Длину отрезка CM найдём из равностороннего треугольника BCS (рис. 6).

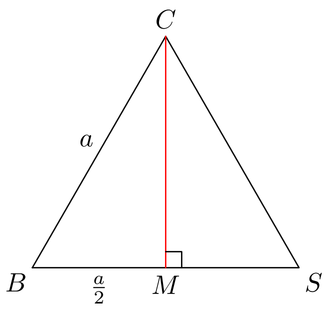

Рис. 6. К задаче 2

По теореме Пифагора имеем:

$$CM^2 = BC^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4},$$

откуда

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Обязательно запомните это выражение для высоты равностороннего треугольника со стороной a. Оно вам ещё неоднократно пригодится.

Для диагонали квадрата $ABCD$ имеем: $BD = a\sqrt{2}$ (почему?). Треугольник ASC равен треугольнику ABC (по трём сторонам), то есть является равнобедренным прямоугольным. Тогда

$$SO = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}\,.$$

Из треугольника CMN теперь имеем:

$$\cos\varphi = \frac{MN}{CM} = \frac{a\sqrt{2}/4}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 3. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина BD, точка M — середина BC. Найдите угол между прямыми AK и DM.

Решение. Пусть точка L — середина BM (рис. 7). Тогда KL — средняя линия треугольника BKM; значит, $KL \parallel DM$, и потому искомый угол есть $\varphi = \angle AKL$.

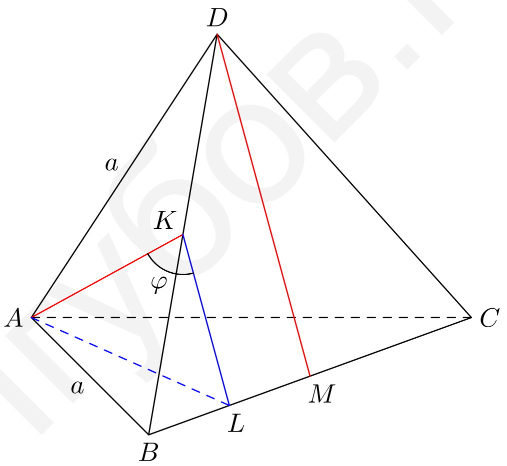

Рис. 7. К задаче 3

Величину φ мы вычислим по теореме косинусов из треугольника AKL. Предварительно найдём стороны этого треугольника.

Как и в предыдущей задаче, имеем:

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,,$$

где a — ребро тетраэдра. Кроме того,

$$KL = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\,.$$

Остаётся найти сторону AL. Это можно сделать из треугольника ABL, в котором $AB = a$, $BL = a/4$, $\angle ABL = 60^\circ$. По теореме косинусов получим:

$$AL^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a\cdot\frac{a}{4}\cos 60^\circ = a^2 + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{16}\,.$$

Теперь возвращаемся к треугольнику AKL. По теореме косинусов:

$$AL^2 = AK^2 + KL^2 - 2 \cdot AK \cdot AL \cos\varphi.$$

Подставляем сюда найденные длины сторон:

$$\frac{13a^2}{16} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}\cos\varphi.$$

Остаётся довести выкладки до конца:

$$\frac{13a^2}{16} = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} - \frac{3a^2}{4}\cos\varphi = \frac{15a^2}{16} - \frac{3a^2}{4}\cos\varphi,$$

откуда находим:

$$\cos\varphi = \frac{1}{6}\,.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.