Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Говоря о средней линии, третью сторону треугольника будем называть основанием.

Так, на рис. 1 показана средняя линия KL треугольника ABC. В этом случае мы называем основанием сторону AC.

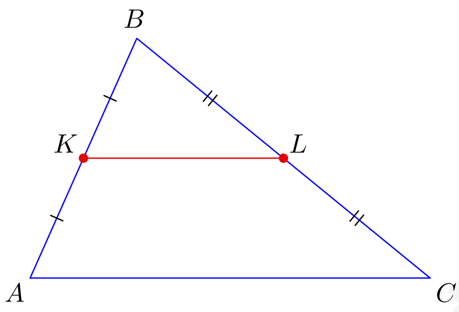

Рис. 1. Средняя линия

Теорема о средней линии. Средняя линия треугольника: 1) параллельна основанию; 2) равна половине основания.

Доказывая теорему о средней линии, мы продемонстрируем один приём, который бывает полезен в задачах. А именно, мы как бы заходим с другой стороны: вместо того, чтобы проводить среднюю линию и доказывать параллельность, мы проводим через середину стороны прямую, параллельную основанию, и показываем, что получится средняя линия.

Доказательство. Пусть K — середина стороны AB треугольника ABC. Проведём KL параллельно основанию AC (рис. 2). Имеем: $\angle BKL = \angle BAC$ (как соответственные углы при параллельных прямых KL и AC).

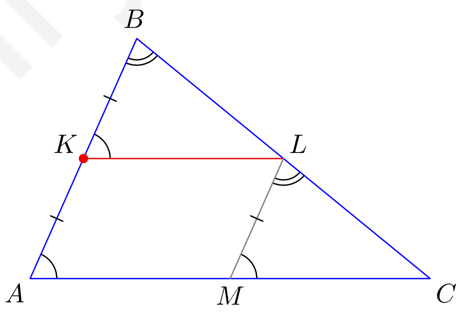

Рис. 2. К теореме о средней линии

Проведём также $LM \parallel AB$. Имеем: $\angle MLC = \angle ABC$ (снова как соответственные углы). Кроме того, четырёхугольник $AKLM$ — параллелограмм по построению. По свойству параллелограмма $LM = AK$ и, стало быть, $LM = KB$.

Таким образом, треугольники KBL и MLC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $BL = LC$ (эти стороны являются соответствующими, так как лежат напротив равных углов), и потому KL — средняя линия. Итак, средняя линия параллельна основанию — первое утверждение теоремы доказано.

Из равенства треугольников KBL и MLC следует также, что $KL = MC$. Вместе с тем, по свойству параллелограмма имеем $KL = AM$. Значит, M — середина AC, и $KL = AC/2$. Тем самым доказано второе утверждение теоремы.

Теорема о средней линии, очень важная сама по себе, позволяет доказать также весьма важную теорему о медианах треугольника.

Теорема о медианах. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины треугольника).

Доказательство. Докажем прежде всего, что две медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Пусть медианы AL и CK треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 3). Пусть также M — середина CO и N — середина AO.

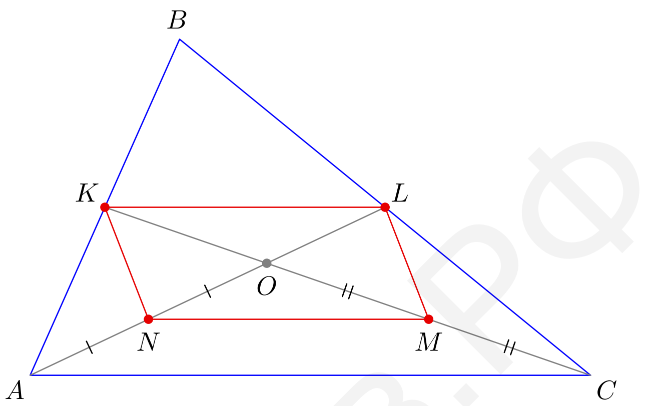

Рис. 3. К теореме о медианах

Отрезок KL есть средняя линия в треугольнике ABC; по теореме о средней линии имеем $KL \parallel AC$ и $KL = AC/2$.

Отрезок NM есть средняя линия в треугольнике AOC, поэтому $NM \parallel AC$ и $NM = AC/2$.

Следовательно, $KL \parallel NM$ и $KL = NM$. Таким образом, в четырёхугольнике $KLMN$ две стороны равны и параллельны, и потому $KLMN$ — параллелограмм. Поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, имеем $KO = OM$ и $LO = ON$. Отсюда следует, что $AO = 2OL$ и $CO = 2OK$, то есть медианы AL и CK делятся точкой O в отношении 2 : 1, считая от вершин.

Нам остаётся доказать, что третья медиана BP также проходит через точку O. В самом деле, предположим, что медианы BP и AL пересекаются в точке O_1. Тогда, как мы только что доказали, должно быть выполнено равенство $AO_1 : O_1L = 2 : 1$. Но ведь и $AO : OL = 2 : 1$; следовательно, точка O_1 совпадает с O. Теорема доказана.