

**Олимпиада 2011г.
8 класс**

1. Сократите дробь:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - x - 1}$$

Решение

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - x - 1} &= \frac{x^4 - 2x^2 - x^2 + 1}{x^2 - x - 1} = \frac{(x^2 - 1)^2 - x^2}{x^2 - x - 1} \\ &= \frac{(x^2 - 1 - x)(x^2 - 1 + x)}{x^2 - x - 1} = x^2 - 1 + x\end{aligned}$$

2. Найдите такие a и b , при которых для всех допустимых значений x верно

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{x - 1} = 2x - 1$$

Решение

Допустимыми значениями x являются все числа, кроме $x=1$.

$$\begin{aligned}ax^2 - 3x - b &= (x - 1)(2x - 1) \\ ax^2 - 3x - b &= 2x^2 - x - 2x + 1\end{aligned}$$

$$ax^2 - 3x - b = 2x^2 - 3x + 1$$

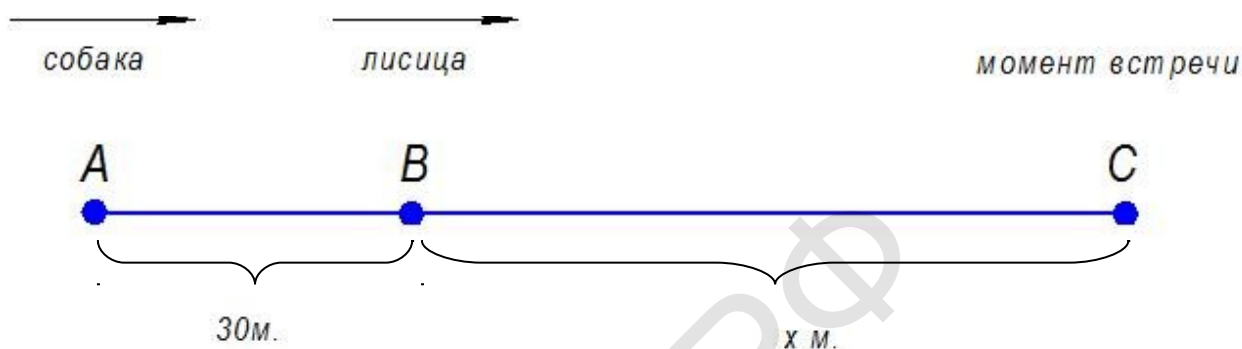
Из последнего равенства следует, что $a = 2$, $b = -1$.

3. Поставьте знак "+" между некоторыми цифрами числа 987 654 321, чтобы в сумме получилось 99. Сколько решений имеет задача?

Решение

- 1) $9+8+7+6+5+4+3+2+1=99$;
- 2) $9+8+7+6+5+4+3+2+1=99$.

4. Собака, находясь в точке A , погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30м от собаки. Скачок собаки равен 2м, скачок лисицы – 1м. Собака делает два скачка в то время когда лисица делает 3 скачка. На каком расстоянии от точки A собака догонит лисицу?



Решение

Обозначим BC за x м, тогда $(30 + x)$ м – прошла собака до точки C , где -момент, когда собака догнала лисицу, x м – прошла лисица до точки C .

За единицу времени собака проходит 4м, а лисица – 3м, время движения у них одно и то же. Значит, возможно составить уравнение:

$$\frac{30 + x}{4} = \frac{x}{3},$$

а отсюда $x = 90$ м. Следовательно, расстояние AC , равное $AB + BC$, это $AC = AB + BC = 30 + 90 = 120$ м.

Ответ: 120м.

5. Два человека, у которых есть один велосипед, должны попасть из пункта A в пункт B , находящийся на расстоянии 40км от A . Первый передвигается пешком со скоростью 4км/ч, на велосипеде – 30 км/ч. Второй – пешком со скоростью 6км/ч, на велосипеде – 20км/ч. За

какое наименьшее время они могут добраться в пункт B (велосипед можно оставлять без присмотра)?

Решение

Пусть первый человек пешком пройдет x километров, а на велосипеде проедет $(40 - x)$ километров. Тогда второй человек пешком пройдет $(40 - x)$ километров, а на велосипеде проедет x километров. Учитывая, что наименьшее время они затратят, если придут в пункт B одновременно, составим уравнение

$$\frac{x}{4} + \frac{40 - x}{30} = \frac{40 - x}{6} + \frac{x}{20},$$

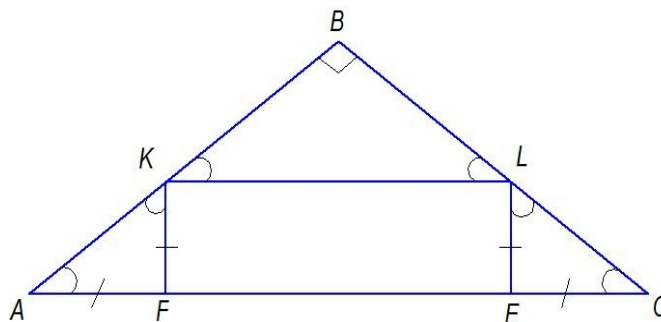
откуда $x = 16$ км.

Искомое время

$$\frac{x}{4} + \frac{40 - x}{30} = \frac{16}{4} + \frac{40 - 16}{30} = 4\frac{4}{5} \text{ ч.}$$

Ответ: 4 ч 48 мин.

6. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие – на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45 см?



Решение

$\triangle ABC$ – равнобедренный, отсюда $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$

$\triangle AFK$ и $\triangle CEL$ – равнобедренные, так как

$$\angle AKF = 180^\circ - \angle F - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle A \text{ и аналогично}$$

$$\angle ELK = \angle C. \text{ Поэтому } AF = FK \text{ и } LE = EC.$$

К тому же $KF = LE$ (стороны прямоугольника), так что $AF = KF = LE = EC$.

Пусть $FK = 2x$, а $KL = 5x$. Тогда, $AF = EC = FK = 2x$ и $FE = KL = 5x$.

Получим

$$AC = AF + FE + EC = 2x + 5x + 2x = 9x = 45, \text{ откуда}$$

$$x = 5. \text{ Далее, } FK = 2x = 10 \text{ см, } KL = 5x = 25 \text{ см.}$$

Ответ: 10 см; 25см.