

5.3. Тригонометрические подстановки

Упражнения к 5.3

1. а) Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{8x^3 - 6x} = 1$.

2. а) Решите уравнение $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$.

б) Решите уравнение $|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$.

3. а) Решите уравнение $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

б) Решите уравнение $\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1$.

4. а) Решите уравнение $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = x + \frac{35}{12}$.

б) Решите уравнение $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{221}{60}$.

5. а) Решите уравнение $x + \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$.

б) Решите уравнение $x + \sqrt{x^2+1} = \frac{5}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. а) Решите уравнение $x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} = 0,125\sqrt{2}$.

б) Решите уравнение $x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0,125\sqrt{3}$.

7. а) Найдите число корней уравнения $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

б) Найдите число корней уравнения $x(x^2-2)(x^4-4x^2+2)=-1$, принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

8. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение $3x + \frac{5}{\sqrt{x^2+25}} = 0,2a\sqrt{x^2+25}$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы один корень уравнение $5x + \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0,5a\sqrt{x^2+4}$.

9. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{y^2+1}, \\ 2y = \frac{x}{x^2+1}. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2x^2 - 1) = 1. \end{cases}$$

10. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2y = y + 2x, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + x = z^2x. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ y^2z = z + 2y, \\ 2z + x = z^2x. \end{cases}$$

11. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x = \frac{2yz}{2y^2 - 1}, \\ y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \\ z = \frac{2x}{1 + x^2}. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x = \frac{2y}{y^2 + 1}, \\ y = \frac{2z}{z^2 - 1}, \\ z^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}. \end{cases}$$

12. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + yz = 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{z}{1 - z^2} = \frac{xy}{1 - 2x^2}. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{y}{x} = \frac{2z}{z^2 - 1}, \\ z = \frac{2xy}{2x^2 - 1}. \end{cases}$$

13. а) Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + 2y + 3z + 4t$, где $(x; y; z; t)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z^2 + t^2 = 4, \end{cases}$ такое, что $xt + yz \geq 2$.

б) Найдите наибольшее возможное значение выражения $4x + 3y + 2z + t$, где $(x; y; z; t)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z^2 + t^2 = 9, \end{cases}$ такое, что $xt + yz \geq 3$.

14. а) Найдите наибольшее возможное значение выражения $2x + 3y + 3z + 2t$, где $(x; y; z; t)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z^2 + t^2 = 49, \end{cases}$ такое, что $xt + yz \geq 21$.

б) Найдите наибольшее возможное значение выражения $3x + 2y + 2z + 3t$, где $(x; y; z; t)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z^2 + t^2 = 25, \end{cases}$ такое, что $xt + yz \geq 20$.

Ответы к упражнениям § 5.3

1. а) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \frac{5\pi}{8}; \cos \frac{\pi}{8}\right\}$; б) $\left\{\cos \frac{7\pi}{9}; \cos \frac{5\pi}{9}; \cos \frac{\pi}{9}\right\}$. 2. а) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{2} \cos \frac{11\pi}{12}\right\}$; б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \frac{\pi}{12}\right\}$. 3. а) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \frac{5\pi}{12}\right\}$; б) $\left\{\cos \frac{4\pi}{5}; \cos \frac{\pi}{5}\right\}$. 4. а) $\left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\right\}$; б) $\left\{\frac{13}{12}; \frac{13}{5}\right\}$. 5. а) $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$; б) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$. 6. а) $\left\{\cos \frac{11\pi}{16}; \cos \frac{9\pi}{16}; \cos \frac{3\pi}{16}; \cos \frac{\pi}{16}\right\}$; б) $\left\{\cos \frac{11\pi}{12}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \frac{5\pi}{12}; \frac{1}{2}\right\}$. 7. а) 3; б) 4. 8. а) $[-15; 15]$; б) $[-10; 10]$. 9. а) $(0; 0)$; б) $\left(\cos \frac{\pi}{8}; \sin \frac{\pi}{8}\right); \left(-\cos \frac{\pi}{8}; -\sin \frac{\pi}{8}\right); \left(\cos \frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right); \left(-\cos \frac{5\pi}{8}; -\sin \frac{5\pi}{8}\right)$. 10. а) $\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi n}{7}; \operatorname{tg} \frac{2\pi n}{7}; \operatorname{tg} \frac{4\pi n}{7}\right)$, где $n = \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$; б) $\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi n}{7}; -\operatorname{tg} \frac{2\pi n}{7}; \operatorname{tg} \frac{4\pi n}{7}\right)$, где $n = \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$. 11. а) $(0; 1; 0)$; $\left(\sqrt{3}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $(0; 0; 0)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}; \sqrt{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right); \left(-\sin \frac{\pi}{5}; -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right); \left(\sin \frac{2\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}\right)$. 12. а) $(1; 0; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3}\right)$; б) $(1; 0; 0)$; $(-1; 0; 0)$; $\left(\cos \frac{\pi}{5}; \sin \frac{\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}\right); \left(\cos \frac{\pi}{5}; -\sin \frac{\pi}{5}; -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}\right); \left(-\cos \frac{\pi}{5}; -\sin \frac{\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}\right); \left(-\cos \frac{\pi}{5}; \sin \frac{\pi}{5}; -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}\right); \left(\cos \frac{2\pi}{5}; \sin \frac{2\pi}{5}; -\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right); \left(-\cos \frac{2\pi}{5}; \sin \frac{2\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right); \left(\cos \frac{2\pi}{5}; -\sin \frac{2\pi}{5}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right); \left(-\cos \frac{2\pi}{5}; -\sin \frac{2\pi}{5}; -\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right)$. 13. а) $\sqrt{145}$; б) $\sqrt{130}$. 14. а) $10\sqrt{13}$; б) $9\sqrt{13}$.