

3.1. Монотонность

Упражнения к 3.1

1. а) Решите уравнение $3^{-x} = \log_3(x+11) + 7$.
- б) Решите уравнение $5^{-x} = \log_5(x+6) + 4$.
2. а) Решите уравнение $6^x + 8^x = 10^x$.
- б) Решите уравнение $5^x + 12^x = 13^x$.
3. а) Решите неравенство $2\sqrt[3]{x+3} > \log_7(5-x) + 1$.
- б) Решите неравенство $\sqrt[3]{7-x^5} > \log_5(x+6) + 1$.
4. а) Решите неравенство $5^{2x-5} + \log_5(2x-3) \geq 5^{4-x} + \log_5(6-x)$.
- б) Решите неравенство $(0,5)^{6-x} + \log_{0,2}(4-x) \geq (0,5)^{x+4} + \log_{0,2}(x+2)$.
5. а) Решите неравенство $\sqrt[3]{x-7} + \sqrt{x-4} \leq 11 - \frac{x^3}{64}$.
- б) Решите неравенство $\sqrt[5]{x-5} + \sqrt{x-2} < 9 - \frac{x^3}{36}$.
6. а) Решите неравенство $x^3 + 2x + \sqrt[5]{x-4} \geq 32$.
- б) Решите неравенство $x^5 + 3x + \sqrt[3]{x-3} \leq 37$.
7. а) Решите уравнение $4\sqrt{6-5x} + |3x-2| = 4x + |3\sqrt{6-5x} - 2|$.
- б) Решите уравнение $5\sqrt{12-x} + |4x-3| = 5x + |4\sqrt{12-x} - 3|$.
8. а) Решите уравнение $7\sqrt{5x+24} + 2|3x+4| + 7x = 2|3\sqrt{5x+24} - 4|$.
- б) Решите уравнение $8\sqrt{7x+30} + 3|2x+5| + 8x = 3|2\sqrt{7x+30} - 5|$.
9. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4\sin x - 3y^3 + 2x = 4\sin y - 3x^3 + 2y, \\ 9x^2 + 16y^2 = 9. \end{cases}$$
- б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 7\sin x - 6y^3 + 5x = 7\sin y - 6x^3 + 5y, \\ 16x^2 + 9y^2 = 4. \end{cases}$$
10. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^7 + 7\sin x + 3y^7 + 7\sin y = 0, \\ 3|x| + 7|y| = 2. \end{cases}$$
- б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 9x^5 + 2\sin x + 9y^5 + 2\sin y = 0, \\ 6|x| + 4|y| = 1. \end{cases}$$
11. а) Решите уравнение $(2x+1)\left(1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 7}\right) + x\left(1 + \sqrt{x^2 + 7}\right) = 0$.
- б) Решите уравнение $(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0$.
12. а) Решите неравенство $\sqrt[5]{x^2 + 4x + 11} + \sqrt[5]{1 - 2x^2} + \log_7 \frac{x^2 + 4x + 13}{2x^2 + 1} \geq 0$.
- б) Решите неравенство $\sqrt[7]{2x^2 - x + 10} + \sqrt[7]{2 - 3x^2} + \log_5 \frac{2x^2 - x + 14}{3x^2 + 2} \leq 0$.
13. а) Решите уравнение $x^3 - 4\sqrt[3]{4x-3} + 3 = 0$.

б) Решите уравнение $x^3 - 5\sqrt[3]{5x-4} + 4 = 0$.

14. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{y + x^2 - 2} = y, \\ \sqrt{y^2 - 3} + \sqrt{x + y^2 - 3} = x. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{y + x^2 - 3} = y, \\ \sqrt{y^2 - 5} + \sqrt{x + y^2 - 5} = x. \end{cases}$$

15. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 + x + 6 = 8y, \\ y^3 + y + 6 = 8z, \\ z^3 + z + 6 = 8x. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 - 3y + 2 = 0, \\ y^3 - 3z + 2 = 0, \\ z^3 - 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

16. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $27x^6 + (3a - 4x)^3 + 3x^2 + 3a = 4x$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$.

17. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $\cos^{18} x + (5\cos x - a)^9 + \cos^2 x + 5\cos x = a$.

18. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $(\sin^2 x - a)^9 - (6\sin x + a)^3 = (6\sin x + a)^9 - (\sin^2 x - a)^3$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет хотя бы один корень уравнение $(\cos^2 x + a)^7 - (4\cos x - a)^5 = (4\cos x - a)^7 - (\cos^2 x + a)^5$.

19. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых любой корень уравнения $4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$ принадлежит отрезку $[1; 3]$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых любой корень уравнения $3\sqrt[6]{6,2x - 5,2} + 4\log_5(4x + 1) + 5a = 0$ принадлежит отрезку $[1; 6]$.

20. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^5 y = a^5 + 2a^3 + a, \\ \sin x + \sin^3 x + a^5 = \sin^3 y + \sin^5 y + a, \\ \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите эти решения

для найденных значений a .

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 8^x + 8^y + 32^y = a^5 + 2a^3 + a, \\ 2^x + 8^x + a^5 = 8^y + 32^y + a, \\ xyz = \log_2 a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите эти решения для найденных значений a .

найденных значений a .

21. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\|x + 2a - 3a\| + \|3x - a + 4a\| \leq 7x + 24$ выполняется для всех значений $x \in [0; 7]$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\|x - 2a + 3a\| + \|3x + a - 4a\| \leq 5x + 24$ выполняется для всех значений $x \in [0; 6]$.

22. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|4\cos x + a + 6| + |5\cos x + a^2 + 1| \leq 10\cos x + |a^2 + a - 2| + 10.$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \leq 11\sin x + |a^2 + a - 20| + 11$.

23. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \leq 16$ выполняется для всех значений $x \in [-2; 1]$.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $3x^5 + 11x + 4|x - a + 3| + 2|3x + a - 5| + \sqrt[3]{4x + 5} \leq 25$ выполняется для всех значений $x \in [-4; -1]$.

24. а) Известно, что числа a , b , c и d отрицательны, а сумма всех действительных корней уравнений $dx^{543} + cx^{43} + bx^3 + a = 0$ и $ax^{543} + bx^{540} + cx^{500} + d = 0$ равна 2,05. Найдите эти корни.

б) Известно, что числа a , b , c и d положительны, а сумма всех действительных корней уравнений $dx^{865} + cx^{65} + bx^5 + a = 0$ и $ax^{865} + bx^{860} + cx^{800} + d = 0$ равна -4,25. Найдите эти корни.

Ответы к упражнениям

1. а) -2 ; б) -1 . 2. а) 2 ; б) 2 . 3. а) $(-2; 5)$; б) $(-6; -1)$. 4. а) $[3; 6)$; б) $[2; 4)$. 5. а) $[4; 8]$; б) $[2; 6)$.
 6. а) $[3; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$; 7. а) 2 ; б) 3 . 8. а) 8 ; б) 10 . 9. $(-0,6; -0,6)$; $(0,6; 0,6)$; б) $(-0,4; -0,4)$; $(-0,4; -0,4)$. 10. а) $(-0,2; 0,2)$; $(0,2; -0,2)$; б) $(-0,1; 0,1)$; $(0,1; -0,1)$. 11. а) $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{5}$. 12. а) $[-2; 6]$; б) $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. 13. а) $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$; 1; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; 1. 14. а) $\left(\frac{22}{9}; \frac{23}{9}\right)$; б) $\left(\frac{59}{15}; \frac{61}{15}\right)$. 15. а) $(1; 1; 1)$; $(2; 2; 2)$; $(-3; -3; -3)$; б) $(1; 1; 1)$; $(-2; -2; -2)$. 16. а) $\left[-\infty; \frac{4}{9}\right]$; б) $(-\infty; 1]$. 17. а) $[-4; 2]$; б) $[-4; 6]$. 18. а) $[-2,5; 3,5]$; б) $[-2,5; 1,5]$. 19. а) $[-8,5; -3,5]$; б) $[-2,8; -1,4]$. 20. а) $(\pi n; \pi k; c)$, $k \in Z$, $n \in Z$, $c \in R$, при $a = 0$; $\left((-1)^m \arcsin a + \pi m; (-1)^l \arcsin a + \pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi r\right)$, $m \in Z$, $l \in Z$, $r \in Z$, при $a \in [-1; 0) \cup (0; 1]$; при прочих a решений нет; б) $(0; 0; c)$, $c \in R$ при $a = 1$; $(\log_2 a; \log_2 a; \log_a 2)$ при $a \in (0; +\infty]$; при прочих a решений нет. 21. а) $[-3; 4]$; б) $[-4; 3]$. 22. а) $\{-2\} \cup [2; +\infty)$; б) $\{-5\} \cup [5; +\infty)$. 23. а) 1 ; б) 6 . 24. а) $0,8; 1,25$; б) $-4; -1,25$.