

2.1. Исследование дискриминанта и формулы Виета**Упражнения 2.1.**

1. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых больший корень уравнения $x^2 - (6a - 1)x + 9a^2 - 3a = 0$ в 9 раз больше, чем его меньший корень.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых меньший корень уравнения $x^2 - (8a - 3)x + 16a^2 - 12a = 0$ в 10 раз меньше, чем его больший корень.

2. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых больший корень уравнения $x^2 - (10a - 19)x + 25a^2 - 95a + 90 = 0$ меньше 7.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых больший корень уравнения $x^2 - (4a - 7)x + 4a^2 - 14a + 12 = 0$ меньше -4 .

3. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $(x + 2a)^2 + (x - 6a)^2 = 200$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 2.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $(x - 2a)^2 + (x - 4a)^2 = 242$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -3 .

4. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых отношение дискриминанта уравнения $ax^2 + x + 2 = 0$ к квадрату разности его корней равно $8 - 2a$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых отношение дискриминанта уравнения $ax^2 - x + 4 = 0$ к квадрату разности его корней равно $4a + 12$.

5. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x + 3 = 0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a + 3)x^2 - 2(a + 3)x - 5 = 0$ имеет единственный корень.

6. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + a = 3$ имеет более одного корня.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + 6x + a = 8$ имеет более одного корня.

7. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$ имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(ax^2 - (a^2 + 9)x + 9a)\sqrt{x+4} = 0$ имеет ровно два различных корня.

8. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$ выполнено при любом значении x .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a^2 - 4)x^2 + 2(a + 2)x - 1 < 0$ выполнено при любом значении x .

9. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + a^2 - 4a + 12 = 0$ принимает наибольшее возможное значение.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 + 4x - a^2 + 6a - 7 = 0$ принимает наименьшее возможное значение.

10. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2(a^2 + 7a + 3)x + 9 = 0$ имеет два различных положительных корня.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2(a^2 - 6a - 3)x + 16 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

11. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 - (a + 1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$ имеет два корня разных знаков.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 - a - 2)x^2 - x + a^2 + a - 2 = 0$ имеет два корня разных знаков.

12. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4\cos^4 3x - 4(a - 3)\cos^2 3x - 2a + 5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4\sin^4 5x - 4(a + 1)\sin^2 5x - 2a - 3 = 0$ имеет хотя бы один корень.

13. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - a - 3 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^4 x + (a - 6)\sin^2 x - 4a + 8 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

14. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 14x + 2(5a + 9)\sin 7x - 110a + 43 = 0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 18x + 4(a-1)\sin 9x - 20a + 69 = 0$ имеет хотя бы один корень.

15. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a+1)\cos x - 4a - 11 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 2x + (2a+9)\sin x - 5a - 11 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a .

16. а) Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arcsin((a-1)x - 1 - (a-1)x^2) + \arcsin x = 0$.

б) Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arccos(ax^2 - (a+1)x + 2) + \arccos(-x) = \pi$.

17. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $\frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 4} = a + 1$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 7} = \frac{a+2}{3}$ имеет хотя бы один корень.

18. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $\frac{(2a+1)x^2 - 2(a+5)x + 18a+9}{x^2 - 5x + 9} = 3a$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $\frac{(a+1)x^2 + (5a+4)x + 9a+9}{x^2 + 5x + 9} = 2a$ имеет хотя бы один корень.

19. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 11}{3\operatorname{tg} x - 1}$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 14}{4\operatorname{tg} x + 1}$.

20. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $16^x + (3a^2 + 5a + 7) \cdot 4^x - 2a + 3 = 0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $49^x + (3a^2 - a + 3) \cdot 7^x - a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

21. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $36^x - (8a - 1) \cdot 6^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $25^x - (8a + 5) \cdot 5^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственный корень.

22. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4^x - (3a - 1) \cdot 2^x + 2a^2 + a - 6 \leq 0$ имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $9^x - (3a - 5) \cdot 3^x + 2a^2 - 6a + 4 \leq 0$ имеет единственное решение.

23. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $16^x - (4^{a+3} + 16^{a+1}) \cdot 4^x + 4^{3a+5} = 0$ больше другого в три раза.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $25^x - (125^{a-1} + 5^{2a-3}) \cdot 5^x + 5^{5a-6} = 0$ больше другого в два раза.

24. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{14}^2 x - (18a + 5) \log_{14} x + 81a^2 + 45a + 6 = 0$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 105.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{16}^2 x - (16a + 19) \log_{16} x + 64a^2 + 152a + 90 = 0$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 8,5.

25. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \log_3^2 x - (a - 2) \log_2 x - 2 \leq 0$ имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \log_5^2 x - (a + 3) \log_5 x + 3 \leq 0$ имеет единственное решение.

26. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений
$$\begin{cases} x - 3y = -1, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 - 10ax - 30ay + 125a^2 + 60a + 9 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений
$$\begin{cases} x + 5y = 3, \\ x^2 + 8xy + 16y^2 - 8ax - 32ay + 25a^2 + 12a + 4 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

27. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений
$$\begin{cases} x + az^2 = by, \\ 2bx + (b-6)y = 8z + 8 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений
$$\begin{cases} 2bx + y = a, \\ (b-1)x + z^2 + z = by \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$.

28. а) Найдите наибольшее значение параметра a , для которого существует хотя бы одна пара $(x; y)$ чисел x и y таких, что $x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 3$.

б) Найдите наименьшее значение параметра a , для которого существует хотя бы одна пара $(x; y)$ чисел x и y , таких что $2x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 2$.

29. а) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует хотя бы одна пара $(x; y)$ чисел x и y таких, что $x^2 - 4xy + 6y^2 + 2y + 2y \sin \pi a + \sin^2 \pi a + 1 = 0$.

б) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует хотя бы одна пара $(x; y)$ чисел x и y таких, что $11x^2 + 6xy + y^2 - 2x - 2x \operatorname{tg} \pi a + \operatorname{tg}^2 \pi a + 1 = 0$.

30. а) Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y таких, что $x^2 - x \log_2(xy) - 2x + 0,5 \log_2^2(xy) + 2 = 0$.

б) Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y таких, что $\log_{0,2}^2(xy) - 4y \log_{0,2}(xy) + 5y^2 + 2y + 1 = 0$.

31. а) Найдите все тройки $(x; y; z)$ чисел x , y , z таких, что $\log_{0,5}^2 x + 2y^2 + 10 \cdot 9^z + 2y \log_{0,5} x - 2y \cdot 3^{z+1} - 2 \cdot 3^z + 1 = 0$.

б) Найдите все тройки $(x; y; z)$ чисел x , y , z таких, что $17 \cdot 25^x + \log_3^2 y + 2z^2 - 8z \cdot 5^x - 2 \cdot 5^x - 2z \log_3 y + 1 = 0$.

32. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x , y , z , удовлетворяющая системе

$$\text{уравнений } \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x , y , z , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = x + y + z, \\ x + 2y + 3z = a. \end{cases}$$

33. а) Решите систему
$$\begin{cases} (2z - y)(y + 2) = 4y + 9, \\ (x - 3)^3 + y + 2 = 0, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

б) Решите систему
$$\begin{cases} 2(y - 2)(y - z) = z - 2, \\ 8x^3 + z = 3xy, \\ 4x^2 + z^2 = 4z, \\ z \leq 2. \end{cases}$$

34. а) Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для которых $4x^2 + 2\cos^2 y + 4x\cos y - 4x + 2 = 0$.

б) Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для которых $4x^2 + 2\sin^2 y - 4x\sin y + 4x + 2 = 0$.

35. а) Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для которых $5\sin^2 x + 2y^2 - 2y\sin x - 8\sin x - 2y + 5 = 0$.

б) Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для которых $5\cos^2 x + 5y^2 + 8y\cos x + 2\cos x - 2y + 2 = 0$.

Ответы к упражнениям 2.1

1. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{6}$. 2. а) $(-\infty; 3, 2)$; б) $(-\infty; 0, 5)$. 3. а) 1; б) -1. 4. а) -4; б) -2. 5. а) 5; б) -8. 6. а) $(-1; 0) \cup (0; 4)$; б) $(-1; 0) \cup (0; 9)$. 7. а) $(-\infty; -5] \cup [-3, 2; 0] \cup \{-4; 4\}$; б) $(-\infty; -4] \cup [-2, 25; 0] \cup \{-3; 3\}$. 8. а) $[1; +\infty)$; б) $[-2; 0)$. 9. а) 2; б) 3. 10. а) $(-6; -1)$; б) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. 11. а) $(-\infty; -0, 5) \cup (0; 3)$; б) $(-2; -1) \cup (1; 2)$. 12. а) $[2, 5; 3, 5]$; б) $[-1, 5; -0, 5]$. 13. а) $\pm \arccos \sqrt{a+3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a \in [-3; -2]$; при прочих a корней нет; б) $\pm \arcsin \sqrt{a-2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a \in [2; 3]$; при прочих a корней нет. 14. а) $[0, 2; 0, 6]$; б) $[3; 4]$. 15. а) $\pm \arccos(a+3) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a \in [-4; -2]$; при прочих a корней нет; б) $(-1)^n \arcsin(a+2) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a \in [-3; -1]$; при прочих a корней нет. 16. а) $\left\{ \frac{1}{a-1}; 1 \right\}$ при $a \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$; $\{1\}$ при $a=1$ и $a=2$; при прочих a корней нет; б) $\left\{ \frac{2}{a}; 1 \right\}$ при $a \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; $\{1\}$ при $a=0$ и $a=2$; при прочих a корней нет. 17. а) $\left[-\frac{13}{7}; 1 \right)$; б) $[-3; 1)$. 18. а) $\left[\frac{8}{11}; 4 \right)$; б) $\left[\frac{10}{11}; 2 \right)$. 19. а) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{22}{9}; +\infty \right)$; б) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty \right)$. 20. а)

(1,5; +∞); б) (-2; +∞). **21.** а) (-0,25; 0,5]; б) (-1,75; 0,5]. **22.** а) 5; б) 3. **23.** а) $1 - \log_4 3$; б) $1 + \log_4 3$; в) $-\log_5 2$; г) $\log_5 2$. **24.** а) $-\frac{1}{9}$; б) $-\frac{9}{8}$. **25.** а) -2; б) 3. **26.** а) -0,3; б) $-\frac{2}{3}$. **27.** а) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$. **28.** а) $\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{3}$. **29.** а) $2n - 0,5, n \in \mathbb{Z}$; б) $n + 0,25, n \in \mathbb{Z}$. **30.** а) (2; 2); б) (-25; -1). **31.** а) (8; 3; 0); б) (0; 81; 4). **32.** а) -0,5; б) $-\frac{17}{48}$. **33.** а) (4; -3; 0); б) (2; -1; 2); в) (0; 1; 0); г) (-1; 2; 2). **34.** а) $(1; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$; б) $\left(-1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. **35.** а) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right), n \in \mathbb{Z}$; б) $(\pi + 2\pi n; 1), n \in \mathbb{Z}$.

ЯГубов.РФ