

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

Тема 4

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ И ДРУГИЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

ГРАФИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

■ Важной частью математической культуры, необходимой для овладения методами решения нестандартных уравнений и неравенств (в том числе и задач с параметром), является умение строить графики элементарных функций и использовать графические интерпретации уравнений и неравенств. Задачи, в решении которых графические интерпретации играют ключевую роль, можно с определенной степенью условности разделить на три основные группы. К первой отнесем задачи, в которых графические интерпретации позволяют наглядно представить решение и записать ответ, а поиск ответа с помощью только аналитических средств приводит к ощутимым логическим трудностям. В таких задачах степень параметра обычно равна 1, а по типу эти задачи представляют собой системы неравенств либо сводятся к таким системам. Последнее позволяет изобразить множество всех точек плоскости Oxa (здесь a — параметр), удовлетворяющих условию задачи, в виде некоторой фигуры (иногда говорят «области», а сам метод решения называют «методом областей»). После этого, рассматривая различные положения горизонтальной прямой $a = c$ (такую прямую часто называют «считывающей»; здесь c — число) относительно изображенной области, можно довольно просто найти ответ на вопрос задачи. Ко второй группе отнесем задачи, допускающие прямую графическую интерпретацию, то есть предполагающие построение (в том числе с помощью известных элементарных преобразований) и, возможно, исследование графика функции. К третьей группе отнесем задачи, решение которых основывается на исследовании взаимного расположения известных фигур — прямых, отрезков, углов, окружностей — после соответствующей (графической или геометрической) интерпретации данных уравнений или неравенств (то есть здесь, в отличие от задач предыдущих групп, рассматриваются не только графики функций, но и геометрические фигуры, заданные уравнениями или неравенствами).

4.1. Метод областей

Начнем с задач первой группы, то есть с задач, решаемых с помощью «метода областей», но сначала вспомним, какими отношениями связаны точки графика данной функции и все другие точки координатной плоскости.



56

Если дана функция $y = f(x)$, то все точки $(x; f(x))$ координатной плоскости Oxy , и только они, принадлежат графику этой функции. Очевидно, что все точки, ординаты которых больше, чем $f(x)$, то есть точки $(x; y)$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $y > f(x)$, находятся над графиком функции; точки $(x; y)$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $y < f(x)$, находятся под графиком функции (рис. 1).

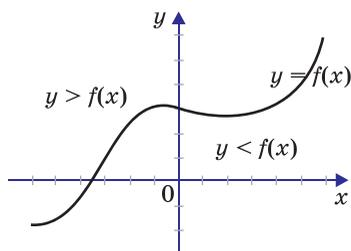


Рис. 1

Рассуждая аналогично, можно легко изобразить на координатной плоскости все точки, удовлетворяющие, например, неравенству $a \leq y \leq b$ при условии $a < b$: это горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = a$ и $y = b$ (рис. 2).

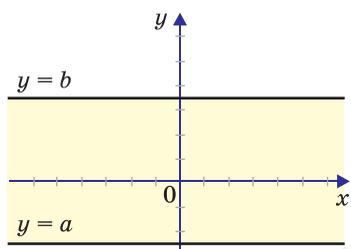


Рис. 2

Множеством всех точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $c \leq x \leq d$ при условии $c < d$, является вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = c$ и $x = d$ (рис. 3).

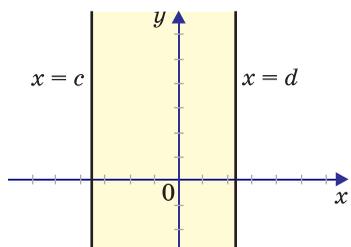


Рис. 3

Найдем теперь множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , координаты каждой из которых удо-

влетворяют неравенству $(2y - x - 4)(y + x - 4) \leq 0$. Произведение двух чисел неположительно, если эти числа имеют разные знаки или хотя бы одно из них равно нулю. Поэтому данное неравенство выполняется только в случае, если

$$\begin{cases} 2y - x - 4 \leq 0, \\ y + x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2y - x - 4 \geq 0, \\ y + x - 4 \leq 0. \end{cases}$$

Первая система легко приводится к виду

$$\begin{cases} y \leq 0,5x + 2, \\ y \geq 4 - x, \end{cases}$$

вторая — к виду

$$\begin{cases} y \geq 0,5x + 2, \\ y \leq 4 - x. \end{cases}$$

Это означает, что данному неравенству удовлетворяют все точки координатной плоскости, которые расположены не выше одной из прямых $y = 0,5x + 2$ или $y = 4 - x$ и не ниже другой из этих прямых. Таким образом, искомое множество ограничено парой вертикальных углов, образованных этими прямыми (на рис. 4 эти углы заштрихованы). Координаты любой точки, принадлежащей части плоскости, ограниченной другой парой вертикальных углов, образованных этими прямыми (на рис. 4 эти углы не заштрихованы), удовлетворяют, как легко понять, неравенству $(2y - x - 4)(y + x - 4) \geq 0$.

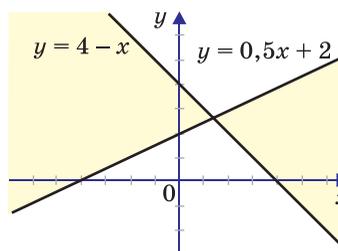


Рис. 4

Вообще, множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , удовлетворяющих неравенству $(y - f(x)) \times (y - g(x)) < 0$, являются все те точки $(x; y)$ этой плоскости, для которых числа $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные знаки, то есть все те точки, которые лежат выше одного из графиков функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$, но ниже другого; множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , удовлетворяющих неравенству $(y - f(x))(y - g(x)) > 0$, являются все те точки этой плоскости, для которых числа $f(x)$ и $g(x)$ одного знака, то есть все те точки, кото-

рые лежат выше каждого из графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ или ниже каждого из них (рис. 5).

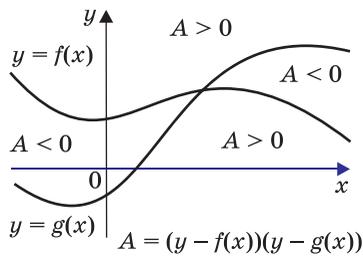


Рис. 5

Далее, если даны графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, можно без труда изобразить множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy та-

ких, что, например, $\begin{cases} y \leq f(x), \\ y \geq g(x), \\ y \geq h(x) \end{cases}$ (рис. 6).

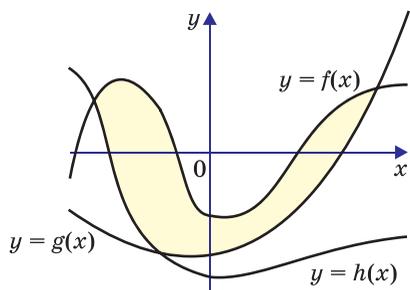


Рис. 6

Сформулируем для функций, графики которых изображены на рисунке 6, новую задачу: найти все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \leq f(x), \\ a \geq g(x), \\ a \geq h(x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого из найденных значений параметра a . Такая формулировка моделирует в достаточно общем виде почти любую задачу на «метод областей». Для ответа на поставленные вопросы удобно использовать плоскость Oxa , изобразив на ней множество всех точек, координаты которых удовлетворяют данной системе, и так называемую «считывающую прямую» (кавычки в дальнейшем будем опускать), то есть прямую $a = c$ (здесь c — число), параллельную оси абсцисс. С помощью параллельного переноса этой прямой довольно просто определить, какие значения может принимать параметр a , и выписать решения системы для каждого из

этих значений. На рисунке 7 изображено одно из возможных положений считывающей прямой.

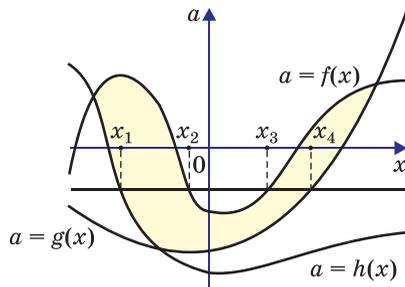


Рис. 7

Для соответствующего значения параметра решением системы является множество $[x_1; x_2] \cup [x_3; x_4]$, где число x_1 находится как корень уравнения $h(x) = a$, числа x_2 и x_3 — как корни уравнения $f(x) = a$, число x_4 — как корень уравнения $g(x) = a$.

Перейдем к конкретным примерам.

Пример 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arccos(3ax + 1) \leq \arccos(2x + 3a - 1)$ имеет хотя бы одно решение, и указать решения неравенства для каждого значения a .

Решение. Неравенство $\arccos l \leq \arccos q$ выполняется в том и только том случае, если

$$\begin{cases} l \geq q, \\ q \geq -1, \\ l \leq 1, \end{cases}$$

(первое из неравенств системы следует из того, что функция $y = \arccos t$ монотонно убывает на области определения, два последних — из того, что эта функция определена при $t \in [-1; 1]$, и первого неравенства системы). Таким образом,

$$\begin{cases} 3ax + 1 \geq 2x + 3a - 1, \\ 2x + 3a - 1 \geq -1, \\ 3ax + 1 \leq 1, \end{cases} \begin{cases} (3a - 2)x \geq 3a - 2, \\ x \geq -\frac{3}{2}a, \\ ax \leq 0. \end{cases}$$

Изобразим множество всех точек $(x; a)$ плоскости Oxa , удовлетворяющих последней системе. Для этого заметим, что при $a > \frac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $x \geq 1$; при $a = \frac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $0 \cdot x \geq 0$ (и его решением является любое действительное число); при $a < \frac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $x \leq 1$.

Искомое множество показано штриховкой на рисунке 8.

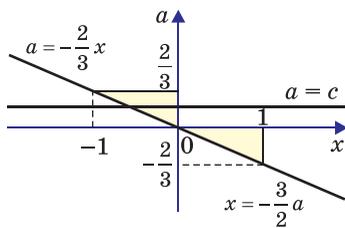


Рис. 8

Для записи ответа удобно рассматривать различные положения считывающей прямой $a = c$ (c — действительное число), параллельной оси абсцисс. При $a < -\frac{2}{3}$ или $a > \frac{2}{3}$ эта прямая не имеет с заштрихованной областью ни одной общей точки. При $a = -\frac{2}{3}$ эта прямая имеет с заштрихованной областью единственную общую точку, лежащую на прямой $a = -\frac{2}{3}x$ (при этом $x = 1$). При $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right]$ эта прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a = -\frac{2}{3}x$ (и, значит, $x = -\frac{3}{2}a$), а правый — на прямой $x = 1$. При $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$ эта прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a = -\frac{2}{3}x$ (и, значит, $x = -\frac{3}{2}a$), а правый — на оси ординат (и, значит, $x = 0$).

Ответ: решений нет при

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right); \{1\} \text{ при } a = -\frac{2}{3}; \left[-\frac{3}{2}a; 1\right]$$

$$\text{при } a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right]; \left[-\frac{3}{2}a; 0\right] \text{ при } a \in \left(0; \frac{2}{3}\right].$$

Замечание. В подобных задачах для упрощения записи решений удобно выражать переменную через параметр и указывать найденное выражение на соответствующем графике, как это сделано в нижней части рисунка 8.

Пример 2. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leq 12, \\ a + 4x \geq x^2, \\ a \leq x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения a .

Решение. Приведем данную систему к виду

$$\begin{cases} a \leq 12 - 3x, \\ a \geq x^2 - 4x, \\ a \leq x, \end{cases}$$

и построим в системе координат Oax графики функций $a = 12 - 3x$ (прямая, проходящая через точки $(4; 0)$ и $(3; 3)$), $a = x^2 - 4x$ (парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $(2; -4)$, пересекающая ось абсцисс в точках $(0; 0)$ и $(4; 0)$), $a = x$ (прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(3; 3)$). Множество всех точек $(x; a)$ плоскости Oax , удовлетворяющих данной системе, покажем штриховкой (рис. 9).

Для записи ответа будем рассматривать различные положения считывающей прямой (два таких положения — $a = a_1$ и $a = a_2$ — показаны на рис. 9). При $a < -4$ или $a > 3$ считывающая прямая не имеет с заштрихованной областью ни одной общей точки. При $a = -4$ считывающая прямая имеет с заштрихованной областью единственную общую точку — вершину параболы (то есть решением данной системы является $x = 2$), при $a = 3$ эта прямая имеет с заштрихованной областью также единственную общую точку — точку пересечения прямых $a = 12 - 3x$ и $a = x$ (то есть решением данной системы является $x = 3$). При $a \in (-4; 0]$ считывающая прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, концы которого лежат на параболе $a = x^2 - 4x$. В этом случае левый конец отрезка является меньшим корнем уравнения $x^2 - 4x - a = 0$ (этот корень $x_1 = 2 - \sqrt{a+4}$), а правый — большим корнем этого уравнения ($x_2 = 2 + \sqrt{a+4}$). При $a \in (0; 3]$ считывающая прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a = x$ (и, значит, $x = a$), а правый — на прямой $a = 12 - 3x$ (и, значит, $x = \frac{12-a}{3}$).

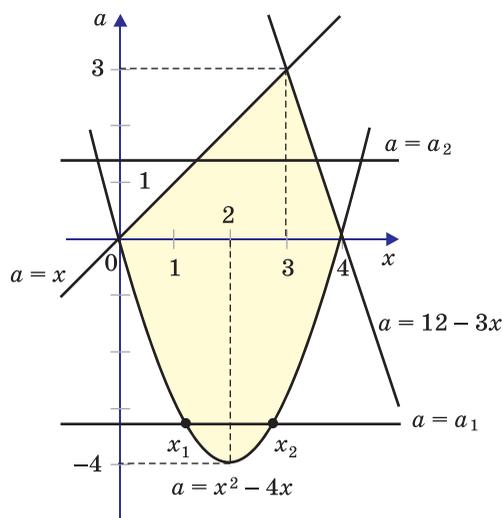


Рис. 9

Ответ: решений нет при $a \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$; $x = 2$ при $a = -4$; $x = 3$ при $a = 3$;
 $x \in [2 - \sqrt{a+4}; 2 + \sqrt{a+4}]$ при $a \in (-4; 0]$;
 $x \in [a; \frac{12-a}{3}]$ при $a \in (0; 3]$.

Пример 3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства

$$x^2 + a + |x - a - 1| + 1 \leq 3x$$

принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$|x - a - 1| \leq 3x - x^2 - a - 1$$

и воспользуемся тем, что $|p| \leq q$ в том и только

том случае, если $-q \leq p \leq q$, то есть если $\begin{cases} p \leq q, \\ p \geq -q. \end{cases}$ Получим систему неравенств

$$\begin{cases} x - a - 1 \leq 3x - x^2 - a - 1, \\ x - a - 1 \geq -3x + x^2 + a + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - 2) \leq 0, \\ a \leq -\frac{x^2}{2} + 2x - 1. \end{cases}$$

Множеством всех точек $(x; a)$ плоскости Oxa , координаты которых удовлетворяют неравенству $x(x - 2) \leq 0$, является полоса, заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = 2$ (включая эти прямые).

Множеством всех точек $(x; a)$ плоскости Oxa , координаты которых удовлетворяют неравенству $a \leq -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$, является парабола $a = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$ и часть плоскости, расположенная ниже этой параболы (рис. 10).

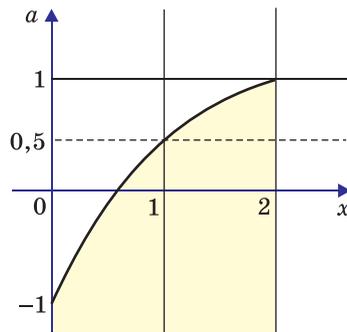


Рис. 10

Система неравенств

$$\begin{cases} x(x - 2) \leq 0, \\ a \leq -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $\{0; 1\}$ только в том случае, если $a \leq 0,5$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0,5]$.

