4 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

4.1. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax = b$ называют *линейным*.

Исследование решения линейного уравнения:

1) если $a \neq 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то уравнение $ax = b$ имеет одно решение: $x = \frac{b}{a}$;

2) если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ примет вид $0 \cdot x = 0$. Поскольку получили верное числовое равенство $0 = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$;

3) если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ примет вид $0 \cdot x = b$. Поскольку равенство $0 = b$ не верно, то уравнение $ax = b$ корней не имеет: $x \in \varnothing$.

4.2. Исследование систем линейных уравнений

Рассмотрим прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ и составим систему линейных уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$

1. Система имеет ***одно решение*** (прямые пересекаются), если

$$k_1 \neq k_2.$$

Угол между этими прямыми находят по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right|.$$

Если выполняется условие $k_1k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны.

2. Система ***не имеет решений*** (прямые параллельны), если

$$k_1 = k_2 \text{ и } b_1 \neq b_2.$$

3. Система имеет ***бесконечное множество решений*** (прямые совпадают), если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

4.3. Линейные неравенства

Неравенство вида $ax < b$ ($>$; $\le$; $\ge$) называют *линейным*.

Исследование решения линейного неравенства:

1) если $a > 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то $x < \frac{b}{a}$ – решение неравенства $ax < b$;

2) если $a < 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то $x > \frac{b}{a}$ – решение неравенства $ax < b$;

3) если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство $ax < b$ примет вид $0 < b$, что не верно. Следовательно, данное неравенство не имеет решений: $x \in \varnothing$;

4) если $a = 0$ и $b > 0$, то неравенство $ax < b$ примет вид $0 < b$, что верно. Следовательно, данное неравенство имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$.

Систему двух неравенств записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x). \end{cases}$$

Чтобы *решить систему неравенств*, необходимо найти множества решений каждого неравенства системы, тогда общая часть (пересечение) этих множеств и будет решением данной системы неравенств.

Совокупность двух неравенств записывают в виде

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x). \end{array}\right.$$

Чтобы *решить совокупность неравенств*, необходимо найти множества решений каждого неравенства совокупности, тогда объединение этих множеств и будет решением данной совокупности неравенств.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–4):

1. Уравнение вида $kx = b$ имеет:

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) одно решение;	а) $k = 0$;
2) более одного решения;	б) $k \ne 0$;

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
3) не имеет решений.	в) $k \neq 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
	г) $k = 0$ и $b = 0$;
	д) $k = 0$ и $b \neq 0$.

2. Неравенство вида $kx > b$ имеет:

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) $x > \frac{b}{k}$;	а) $k > 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
2) $x < \frac{b}{k}$;	б) $k < 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
3) $x \in \mathbf{R}$;	в) $k = 0$ и $b \neq 0$;
4) $x \in \varnothing$.	г) $k = 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
	д) $k = 0$ и $b > 0$;
	е) $k = 0$ и $b < 0$.

3. Система уравнений $\begin{cases} y = k_1 x + b_1, \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$ имеет:

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) одно решение;	а) $k_1 = k_2$;
2) более одного решения;	б) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;
3) не имеет решений.	в) $k_1 \neq k_2$;
	г) $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$;
	д) $b_1 = b_2$.

4. Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ пересекаются:

ПОД УГЛОМ	ПРИ УСЛОВИИ
1) $90°$;	а) $k_1 \neq k_2$;
2) $0°$;	б) $b_1 \neq b_2$;
3) $\operatorname{arctg}\left\lvert\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right\rvert$.	в) $k_1 k_2 = 1$;
	г) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;
	д) $k_1 k_2 = -1$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1 – в , 2 – г , 3 – д.	1 – а , 2 – б, 3 – е, 4 – д.	1 – в, 2 – г, 3 – б.	1 –д , 2 – г, 3 – а.

Примеры

Пример 1. Найдите все значения a и b, при которых уравнение $5ax - 2b = x$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Приведем уравнение к виду $kx = b$. Запишем:

$$5ax - x = 2b\,,\ x(5a-1) = 2b\,.$$

Уравнение имеет бесконечно много решений, если $5a-1=0$ и $2b=0$, то есть если $a=0{,}2$ и $b=0$.

Ответ: $a=0{,}2$, $b=0$.

Пример 2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\,1)$ и образующей с осью Ox угол $30°$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $y=kx+b$. Угловой коэффициент k прямой находят по формуле $k=\operatorname{tg}\alpha$ (см. п. 3.2). Зная, что $\alpha=30°$, получим $k=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку искомая прямая проходит через точку $M(2;\,1)$, то, подставляя в уравнение прямой координаты точки M $x=2$, $y=1$ и значение $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, найдем значение b:

$$1=\frac{2\sqrt{3}}{3}+b\text{, откуда } b=-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\,.$$

Зная значения k и b, запишем уравнение искомой прямой:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\,.$$

Ответ: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Найдите угол между прямыми

$$y=\frac{7}{2}x+1 \text{ и } y=-\frac{4}{3}x+2\,.$$

Решение. Угол между прямыми найдем по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|.$$

Зная, что $k_1=\frac{7}{2}$, а $k_2=-\frac{4}{3}$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{-\frac{4}{3}-\frac{7}{2}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{2}}\right|=\left|\frac{-\frac{29}{6}}{-\frac{22}{6}}\right|=\frac{29}{22}\text{, откуда } \alpha=\operatorname{arctg}\frac{29}{22}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{29}{22}$.

Пример 4. Найдите сумму координат точки пересечения прямых $3x-5y=27$ и $2x+3y=18$.

Решение. Координаты точки пересечения заданных прямых найдем, решая систему уравнений $\begin{cases}3x-5y=27,\\2x+3y=18.\end{cases}$

Выполним ряд преобразований.

1. Умножим первое уравнение системы на 3, а второе на 5. Получим: $\begin{cases}9x-15y=81,\\10x+15y=90.\end{cases}$

2. Сложим уравнения системы: $19x=171$, откуда $x=9$.

3. Подставим значение $x=9$ в любое уравнение системы, например в уравнение $3x-5y=27$, и найдем значение y: $27-5y=27$, откуда $y=0$.

4. Найдем сумму координат точки пересечения заданных прямых: $9+0=9$.

Ответ: 9.

Пример 5. Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases}-1{,}4x+0{,}4ay+1=0,\\(1-0{,}75a)x+ay-1{,}75=0\end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Запишем каждое уравнение системы в виде:

$$y=kx+b.$$

Преобразуем первое уравнение системы, предварительно умножив его на 5:

$$-7x+2ay+5=0,\ 2ay=7x-5,\ y=\frac{7}{2a}x-\frac{5}{2a}.$$

Получим $k_1=\frac{7}{2a}$, $b_1=-\frac{5}{2a}$.

Преобразуем второе уравнение системы, предварительно умножив его на 4:

$$(4-3a)x+4ay=7\,,\ 4ay=(3a-4)x+7\,,\ y=\frac{3a-4}{4a}x+\frac{7}{4a}.$$

Получим $k_2=\frac{3a-4}{4a}$, $b_2=\frac{7}{4a}$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $a\neq 0$, то исходная система не имеет решений при условии, что $\begin{cases}k_1=k_2,\\ b_1\neq b_2\end{cases}$ или $\begin{cases}\frac{7}{2a}=\frac{3a-4}{4a},\\ -\frac{5}{2a}\neq\frac{7}{4a}\end{cases}$; $\Leftrightarrow\begin{cases}7=\frac{3a-4}{2},\\ -5\neq\frac{7}{2}\end{cases}$.

Найдем значение a из первого уравнения системы:

$$3a-4=14\,,\ 3a=18\,,\ a=6\,.$$

2. Рассмотрим исходную систему при условии, что $a=0$. Подставляя значение $a=0$ в каждое уравнение этой системы, получим: $\begin{cases}7x=5,\\ 4x=7;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{5}{7},\\ x=\frac{7}{4}.\end{cases}$ Так как $\frac{5}{7}\neq\frac{7}{4}$, то при $a=0$ система не имеет решения.

Ответ: $\{0;\,6\}$.

Пример 6. Найдите середину интервала, являющегося решением системы неравенств $\begin{cases}-2<2x-1<1,\\ \left(2\sqrt{5}-5\right)(3-5x)<0.\end{cases}$

Решение. Решим каждое неравенство системы:

1) $-2<2x-1<1\Leftrightarrow -1<2x<2\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<1$;

2) $\left(2\sqrt{5}-5\right)(3-5x)<0\Leftrightarrow 3-5x>0\Leftrightarrow 5x-3<0\Leftrightarrow x<\frac{3}{5}$,

поскольку $2\sqrt{5}-5=\sqrt{20}-\sqrt{25}<0$.

Найдем решение данной системы неравенств. Согласно рисунку 4.1 запишем $x\in\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{5}\right)$.

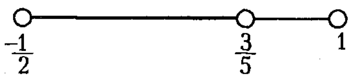

Рис. 4.1

Найдем середину интервала $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{5}\right)$. Получим:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right):2=\frac{1}{20}=0{,}05\,.$$

Ответ: 0,05.

Пример 7. Найдите наибольшее целое решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} 2-\frac{5-x}{3} \geq x+1, \\ 3+\frac{x-1}{4} < 2-x. \end{array}\right.$

Решение. Найдем решение каждого неравенства совокупности, выполнив равносильные преобразования неравенств:

1) $2-\frac{5-x}{3} \geq x+1 \Leftrightarrow 6-5+x \geq 3x+3 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1$;

2) $3+\frac{x-1}{4} < 2-x \Leftrightarrow 12+x-1 < 8-4x \Leftrightarrow 5x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{5}$.

Поскольку решение второго неравенства совокупности содержит решение первого неравенства, то решением данной совокупности неравенств является промежуток $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$, а число -1 является наибольшим целым решением этой совокупности неравенств.

Ответ: -1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите все значения a и b, при которых уравнение $2bx-a=3x$ имеет бесконечно много решений.

2. Найдите все значения a и b, при которых неравенство $2bx-a \geq 3x$ не имеет решений.

3. Найдите такие значения a, при которых уравнение $\left(a^2-1\right)x+3-a=\left(-\sqrt{2}a\right)^2$:

а) имеет один корень;

б) имеет более одного корня;

в) не имеет корней.

4. Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y=3-7x$ и проходит через точку с координатами $(3;\ -7)$.

5. Запишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y=5x$ и проходит через точку с координатами $(0;\ -5)$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 675{,}1x+324{,}9y=2675{,}1, \\ 32{,}49x+67{,}51y=232{,}49. \end{cases}$$

7. Найдите все значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(m-1)y=3, \\ (m+1)x+4y=-3 \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений; б) не имеет решений.

8. Найдите все значения a, при которых прямые

$2x-\left(2-(-3a)^2\right)y=3a$ и $y=1-x$:

а) параллельны; б) перпендикулярны.

9. Найдите угол между прямыми $2y=5-3x$ и $x+y=1$.

10. Найдите значение числа a, при котором система

$$\begin{cases}\dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{0,4x+1,2y}{2}=2,\\ \dfrac{x+2y}{2}+\dfrac{5y-x}{3}=3,\\ \dfrac{5x-y}{3}+\dfrac{10y-x}{2}=a\end{cases}$$ имеет решение.

11. Найдите значение a, при котором система уравнений $\begin{cases}x-\left(1-4,5a^2\right)y=1,5a,\\ x+y=1\end{cases}$ не имеет решений.

12. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{3x-3}{2}-2x+\dfrac{3x}{2}>3-\dfrac{3x+15}{2},\\ \dfrac{x+5}{4}-6+7x<\dfrac{x+1}{2}.\end{cases}$$

13. Найдите среднее арифметическое целых решений системы неравенств $\begin{cases}-1\le 2x-3\le 1,\\ 5-0,4x>0.\end{cases}$

14. Решите неравенство $a(2x-6)+6x+20\le 0$.

15. При каких значениях b наибольшее целое число, являющееся решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}x<5,\\ x\le b\end{array}\right.$ равно 13?

16. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}5-\dfrac{3-x}{4}<2x+3,\\ 4+\dfrac{2x-1}{3}\ge 5-x.\end{array}\right.$

17. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}-1<3-2x<1,\\ 5x-3\ge 7-2x.\end{array}\right.$

Ответы: **1.** $a=0,\ b=1,5$. **2.** $a>0,\ b=1,5$. **3.** а) $a\ne\pm1$; б) 1; в) -1. **4.** $y=-7x+14$. **5.** $y=-\dfrac{1}{5}x-5$. **6.** (3; 2). **7.** а) -3; б) 3. **8.** а) $-\dfrac{2}{3}$; б) 0. **9.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$. **10.** 7. **11.** $-\dfrac{2}{3}$. **12.** -1. **13.** 1,5. **14.** $x\ge\dfrac{2a}{a+3}$ при $a<-3$; $x\in\varnothing$ при $a=-3$; $x\le\dfrac{2a}{a+3}$ при $a>-3$. **15.** $13\le b<14$. **16.** $\left(\dfrac{5}{7};\ +\infty\right)$. **17.** $(1;\ +\infty)$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Сумма целых чисел, между которыми заключен корень уравнения $\left(5+4x^{-1}\right)^{-1}=(-3)^{-2}$, равна	1) -1; 2) -2; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
2	Ближайшее к корню уравнения $\left(5+\sqrt{27}\right)\cdot x=-2$ целое число равно	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 2; 5) -2.
3	Уравнение $15x+3a=3+x$ имеет отрицательное решение при условии, что a	1) $a\in\mathbf{R}$; 2) $a=0$; 3) $a<3$; 4) $a>1$; 5) $a\geq 1$.
4	Уравнение $a(2x-a)=-6x-9$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x<-2$, при условии, что a	1) $a<-1$; 2) $a\neq -3$; 3) $a\leq -1$; 4) $a\in\mathbf{R}$; 5) $a<-1$, $a\neq -3$.
5	Тангенс угла между прямыми $x-y=2$ и $4x+2y=5$ равен	1) 5; 2) -3; 3) -5; 4) 3; 5) -1.
6	Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\left(3-\sqrt{10}\right)x>19-6\sqrt{10}$, равно	1) 31; 2) 7; 3) 2; 4) 0; 5) -1.
7	Область определения функции $y=\sqrt{-x+\sqrt{3-\sqrt{8}}+2}$ задает множество чисел вида	1) $x\in\mathbf{R}$; 2) $x\geq 1$; 3) $\left(-\infty;\sqrt{2}+1\right]$; 4) $\left(\sqrt{2}+1;\ +\infty\right)$; 5) $x>3-2\sqrt{2}$.
8	Решением системы неравенств $\begin{cases}x>2,\\ x\geq c\end{cases}$ является промежуток $(2;\ +\infty)$ при следующих значениях c	1) 2; 2) $(-\infty;\ 2)$; 3) $(-\infty;\ 2]$; 4) $[0;\ 2]$; 5) $[2;\ +\infty)$.
9	Решение системы неравенств $\begin{cases}\left(1-\sqrt{3}\right)x+\sqrt{12}\leq 4,\\ x\sqrt{243}\leq -27\end{cases}$ имеет вид	1) $\mathbf{R}$; 2) $(0;\ +\infty)$; 3) $\left[0;\ 2\sqrt{3}\right]$; 4) $\varnothing$; 5) $\left(-\infty;\ -8\sqrt{3}\right]$.

№	Задания	Варианты ответов
10	Решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>a \end{array}\right.$ является множество всех действительных чисел при следующих значениях a	1) $a \le 1$; 2) $a<1$; 3) $a=1$; 4) $a>1$; 5) $a \in \mathbf{R}$.
11	Если число -5 – наименьшее целое решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x \ge -2, \\ -x<-a, \end{array}\right.$ то целое значение a равно	1) -6; 2) -5; 3) 1; 4) 6; 5) 16.
12	Количество целых отрицательных решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} -3<1-2x \le -1, \\ 3x+1<4x+5 \end{array}\right.$ равно	1) 3; 2) 4; 3) 1; 4) 2; 5) 8.
13	Площадь фигуры, ограниченной линиями $3x-4y+12 \ge 0$, $x+y-2 \le 0$ и $y \ge 0$ равна	1) 7; 2) $\frac{15}{7}$; 3) $7\frac{5}{7}$; 4) 27; 5) 30.
14	Прямые $3x+ay=4$ и $3x+2y=\frac{b}{2}$ перпендикулярны, если	1) $a=4{,}5$, $b=0$; 2) $a \ne 2$, $b \in \mathbf{R}$; 3) $a=-4{,}5$, $b \in \mathbf{R}$; 4) $a=0$, $b \in \mathbf{R}$; 5) $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	1	4	5	4	5	3
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	4	2	1	1	3	3