Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + x - y)\sqrt{x+4}}{\sqrt{3-x}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

(ЕГЭ 2015, досрочная волна)

Ответ

$(-8; -3] \cup \{2\} \cup [4; 6)$

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad -4 \leqslant x < 3$$

Заметим, что при любом $a \in \mathbb{R}$ у системы имеется решение

$$x = -4, \qquad y = a + 4\,,$$

таким образом, с учётом того, что $y = -x + a$, задача может быть переформулирована так: найти значения параметра a, при каждом из которых на множестве $(-4; 3)$ уравнение

$$(-x + a)^2 - x(-x + a) + x - (-x + a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + (2 - 3a)x + a^2 - a = 0$$

имеет ровно одно решение.

Решения данного уравнения:

$$x = \frac{3a - 2 \pm (a - 2)}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{aligned} &x = a - 1 \\ &x = 0,5a\,, \end{aligned}\right.$$

следовательно, у данного уравнения одно решение только при $a = 2$. При этом это решение $x = 1$ – подходит по условию, следовательно, $a = 2$ идёт в ответ.

При $a \neq 2$ у данного уравнения два различных решения. По условию необходимо и достаточно, чтобы среди этих решений ровно одно попало на интервал $(-4; 3)$.

1) Пусть $-4 < a - 1 < 3$, тогда $-3 < a < 4$, следовательно, $-1,5 < 0,5a < 2$, то есть тогда и второе решение попадает в этот интервал, что не подходит по условию.

2) Пусть $-4 < 0,5a < 3$, тогда $-8 < a < 6$, следовательно, $-9 < a - 1 < 5$, то есть второе решение не попадает в этот интервал только при условии

$$\left[\begin{aligned} &-9 < a - 1 \leqslant -4 \\ &\ \ 3 \leqslant a - 1 < 5 \end{aligned}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{aligned} &-8 < a \leqslant -3 \\ &\ \ 4 \leqslant a < 6 \end{aligned}\right.$$

Таким образом, ответ

$$a \in (-8; -3] \cup \{2\} \cup [4; 6)\,.$$

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 2y + 3,75 = |4x - 2y - 10| \\ 2x + 4y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

(ЕГЭ 2015, основная волна)

Ответ

$(-5\sqrt{5}; -5] \cup [5; 5\sqrt{5})$

Решение

Рассмотрим два случая:

1) $4x - 2y - 10 \geqslant 0$

Первое уравнение системы в этом случае приводится к виду

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y + 13,75 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-4)^2 + (y+2)^2 = 2,5^2\,.$$

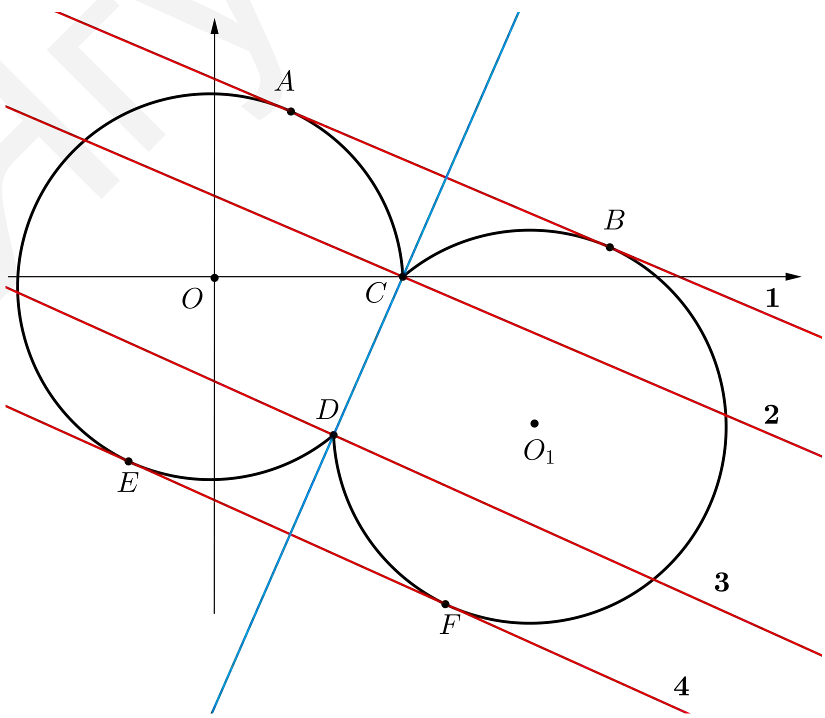
Отдельно рассматриваемое данное уравнение задаёт на плоскости $(x; y)$ окружность с центром в точке $O_1(4; -2)$ и радиусом $2,5$, но с учётом условия $4x - 2y - 10 \geqslant 0$ нам подходит только часть этой окружности, лежащая в полуплоскости $y \leqslant 2x - 5$.

2) $4x - 2y - 10 < 0$

Первое уравнение системы в этом случае приводится к виду

$$x^2 + y^2 = 6,25 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = 2,5^2\,.$$

Отдельно рассматриваемое данное уравнение задаёт на плоскости $(x; y)$ окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $2,5$, но с учётом условия $4x - 2y - 10 < 0$ нам подходит только часть этой окружности, лежащая в полуплоскости $y > 2x - 5$.



Решая системы уравнений

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2=2,5^2\\ y=2x-5\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases}x^2+y^2=2,5^2\\ y=2x-5\end{cases},$$

находим, что окружности из пунктов 1) и 2) пересекаются с прямой $y = 2x - 5$ в точках $C(2,5;0)$ и $D(1,5;-2)$.

При каждом фиксированном значении a второе уравнение исходной системы задаёт прямую, параллельную OO_1 (при $a = 0$ оно задаёт прямую OO_1, а при $a \neq 0$ прямую, полученную из OO_1 параллельным переносом).

Найдём значение a, при котором прямая $y = 0,25a - 0,5x$ имеет с окружностью $x^2 + y^2 = 2,5^2$ одну общую точку:

$$x^2+(0,25a-0,5x)^2=2,5^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5(x^2-0,2ax+0,01a^2)+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{20}=25\,.$$

Чтобы данное уравнение имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы левая часть представляла собой полный квадрат, откуда получим $a^2 = 125$, то есть $a = \pm 5\sqrt{5}$.

Проводя вычисления, можно показать, что при $a = \pm 5\sqrt{5}$ окружность из пункта 2) также имеет с прямой $y = 0,25a - 0,5x$ одну общую точку, то есть случаям **1** и **4** на рисунке отвечают прямые $y = 0,25a - 0,5x$ при $a = 5\sqrt{5}$ и $a = -5\sqrt{5}$ соответственно.

Также легко показать, что случаям **2** и **3** отвечают прямые $y = 0,25a - 0,5x$ при $a = 5$ и $a = -5$ соответственно.

Прямая $y = 0,25a - 0,5x$ при $a > 5\sqrt{5}$ не имеет общих точек с нарисованными дугами окружностей.
При $a = 5\sqrt{5}$ эта прямая имеет две общие точки с этими дугами окружностей.
При $5 < a < 5\sqrt{5}$ эта прямая имеет четыре общие точки с этими дугами окружностей.
При $a = 5$ эта прямая имеет три общие точки с этими дугами окружностей.
При $-5 < a < 5$ эта прямая имеет две общие точки с этими дугами окружностей.
При $a = -5$ эта прямая имеет три общие точки с этими дугами окружностей.
При $-5\sqrt{5} < a < -5$ эта прямая имеет четыре общие точки с этими дугами окружностей.
При $a = -5\sqrt{5}$ эта прямая имеет две общие точки с этими дугами окружностей.
При $a < -5\sqrt{5}$ эта прямая не имеет общих точек с этими дугами окружностей.

Таким образом, ответ:

$$a \in (-5\sqrt{5}; -5] \cup [5; 5\sqrt{5})\,.$$

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y(y-7) = xy - 5(x+2) \\ x \leqslant 6 \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

(ЕГЭ 2015, резерв)

Ответ

$a \in \left\{-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right\} \cup [0; +\infty)$

Решение

Преобразуем первое уравнение системы:

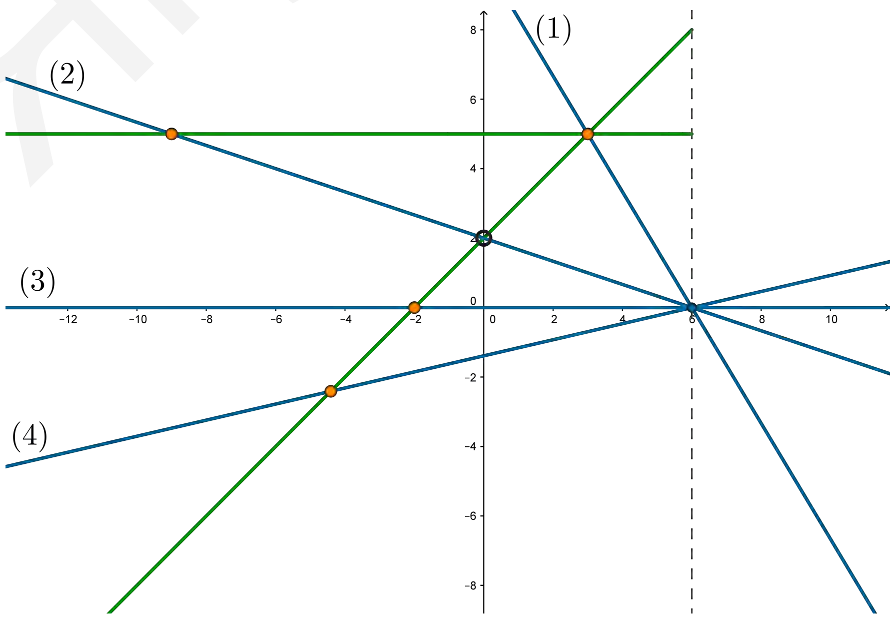
$$y^2 - (7+x)y + 5(x+2) = 0, \quad D = (x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x+2 \quad \text{и} \quad y_2 = 5.$$

Таким образом, систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & y = x+2 \\ & y = 5 \end{aligned} \right. \\ x \leqslant 6 \\ y \neq 2 \\ y = a(x-6) \end{cases}$$

Найдем значения параметра, при каждом из которых прямая $y = a(x-6)$ пересекает ровно в одной точке график системы $\begin{cases} \left[\begin{aligned} & y = x+2 \\ & y = 5 \end{aligned} \right. \\ x \leqslant 6 \\ y \neq 2 \end{cases}$

Рассмотрим рисунок:



Зеленым цветом отмечен график системы (заметим, что точка $(0;2)$ выколота), синим – примеры подходящего положения прямой $y = a(x-6)$.

1) Рассмотрим положение (1): прямая $y = a(x-6)$ проходит через точку $(3;5)$ пересечения графиков $y = 5$ и $y = x+2$. Следовательно, $a = -\dfrac{5}{3}$.

2) Рассмотрим положение (2): прямая $y = a(x-6)$ проходит через выколотую точку $(0;2)$, следовательно, $a = -\dfrac{1}{3}$.

3) Рассмотрим положение (3): прямая $y = a(x-6)$ совпадает с осью Ox, следовательно, $a = 0$.

4) Рассмотрим положение (4): прямая $y = a(x-6)$ наклонена под острым углом к оси Ox, следовательно, $a > 0$.

Таким образом, имеем окончательный ответ: $a \in \left\{-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right\} \cup [0;+\infty)$.

Задача 18

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+4x-8=|4x^2+4x-8| \\ 2x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

(ЕГЭ 2015, резервный день)

Ответ

$\{0\}\cup(4;-2+2\sqrt{10})$

Решение

Выражая из второго уравнения y и подставляя результат в первое уравнение исходной системы, получим

$$(2x-a)^2+4x-8=|4x^2+4x-8| \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2+(4-4a)x-8+a^2=|4x^2+4x-8|\,,$$

таким образом, задача сводится к нахождению всех a, при которых полученное уравнение имеет более двух решений.

Рассмотрим два случая:

1)

$$4x^2+4x-8\geqslant 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)\,.$$

В этом случае уравнение примет вид

$$4x^2+(4-4a)x-8+a^2=4x^2+4x-8 \quad\Leftrightarrow\quad -4ax+a^2=0$$

– при $a\neq 0$ это линейное уравнение, следовательно, при $a\neq 0$ оно имеет не более одного решения на рассматриваемом множестве. При $a=0$ у него бесконечно много решений, следовательно, $a=0$ идёт в ответ.

2)

$$4x^2+4x-8<0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x\in(-2;1)\,.$$

В этом случае уравнение примет вид

$$4x^2+(4-4a)x-8+a^2=-4x^2-4x+8 \quad\Leftrightarrow\quad 8x^2+(8-4a)x-16+a^2=0$$

– квадратное уравнение, следовательно, оно имеет не более двух решений на рассматриваемом множестве.

Пусть $a\neq 0$. Так как требуется, чтобы уравнение, полученное в начале решения, имело три корня или более, то нам необходимо и достаточно, чтобы в пункте 1) было одно решение, а в пункте 2) было два различных решения.

Тогда согласно пункту 1) $a\neq 0$ и $x=0,25a$, откуда

$$0,25a\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty) \qquad\Leftrightarrow\qquad a\in(-\infty;-8]\cup[4;+\infty)\,.$$

При этом из пункта 2) имеем: дискриминант

$$D=(8-4a)^2-32(-16+a^2)=64-64a+16a^2+32\cdot 16-32a^2=576-64a-16a^2$$

чтобы уравнение имело хоть какие-нибудь различные два корня, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено

$$D>0 \qquad\Leftrightarrow\qquad a^2+4a-36<0 \qquad\Leftrightarrow\qquad -2-2\sqrt{10}<a<-2+2\sqrt{10}$$

Кроме того, корни уравнения в пункте 2) должны удовлетворять неравенству $-2 < x < 1$:

$$-2 < \frac{a - 2 \pm \sqrt{36 - 4a - a^2}}{4} < 1\,,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a - 2 + \sqrt{36 - 4a - a^2} < 4 \\ a - 2 - \sqrt{36 - 4a - a^2} > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{36 - 4a - a^2} < 6 - a \\ -\sqrt{36 - 4a - a^2} > -6 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{36 - 4a - a^2} < 6 - a \\ \sqrt{36 - 4a - a^2} < 6 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 8a > 0 \\ 2a^2 + 16a > 0 \\ -6 < a < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in (4; 6)\,.$$

Итого, в случае $a \neq 0$ подходят a, для которых выполняются условия

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -8] \cup [4; +\infty) \\ -2 - 2\sqrt{10} < a < -2 + 2\sqrt{10} \\ a \in (4; 6)\,. \end{cases}$$

откуда находим $a \in (4; -2 + 2\sqrt{10})$.
Окончательный ответ:

$$a \in \{0\} \cup (4; -2 + 2\sqrt{10})\,.$$

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - x \cdot \log_2(a-3) + 6 = 0$$

имело единственное решение на отрезке $[-2; 2]$.

(ЕГЭ 2016, досрочная волна)

Ответ

$a \in (3; \dfrac{385}{128}] \cup \{2051\} \cup (32771; +\infty)$.

Решение

Перепишем уравнение в виде $x^3 + 4x^2 = x \cdot \log_2(a-3) - 6$, обозначим $b = \log_2(a-3)$, $f(x) = x^3 + 4x^2$, $g(x) = bx - 6$.

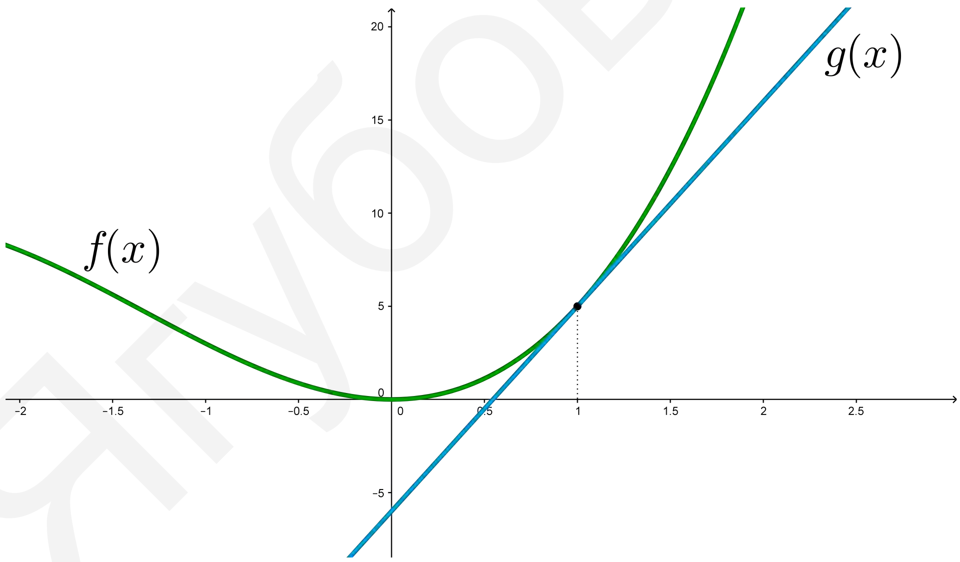
Найдем такие значения b, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ровно одну общую точку на отрезке $[-2; 2]$.

$g(x)$ – это прямая (при каждом фиксированном b), проходящая через точку $(0; -6)$.

1) Рассмотрим отдельно случай, когда $g(x)$ касается $f(x)$ в точке x_o:

$$\begin{cases} f'(x_o) = b \\ x_o^3 + 4x_o^2 - x_o \cdot b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3x_o^2 + 8x_o \\ x_o^3 + 2x_o^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3x_o^2 + 8x_o \\ (x_o - 1)(x_o^2 + 3x_o + 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 11 \\ x_o = 1 \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае обе функции имеют ровно 1 точку пересечения: $x_o = 1$.

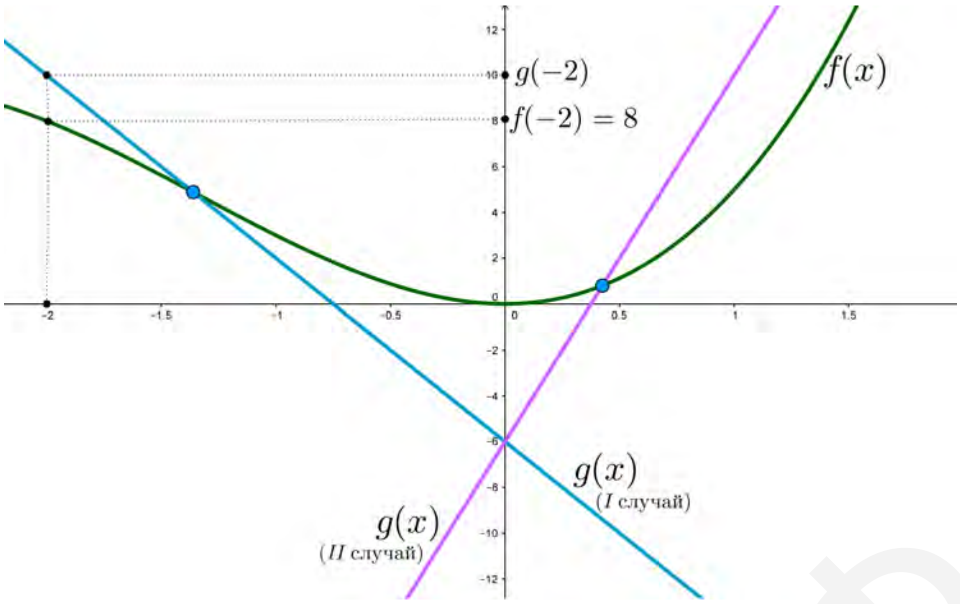


$b = 11 \Rightarrow \log_2(a-3) = 11 \Rightarrow a = 2051$.

2) Рассмотрим случай $b \neq 11$ (нет точек касания).

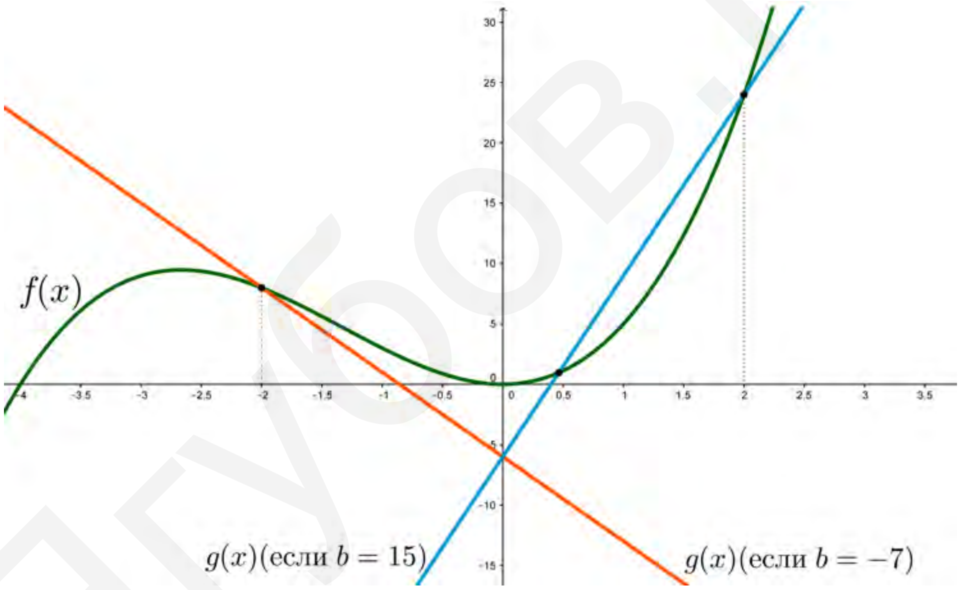
Тогда функции будут иметь ровно 1 точку пересечения на $[-2; 2]$, если $g(-2) > f(-2)$ (I случай) или $g(2) > f(2)$ (II случай):

$$\left[\begin{array}{l} -2b - 6 > 8 \ \ (\text{I случай}) \\ \ \ 2b - 6 > 24 \ \ (\text{II случай}) \end{array} \right.$$



Следовательно, $b \in (\infty; -7) \cup (15; +\infty) \Rightarrow a \in (3; \frac{385}{128}) \cup (32771; +\infty)$.

Отдельно рассмотрим случаи, когда $b = -7$ или $b = 15$:



а) $b = -7$. Функции имеют общую точку $x = -2$, следовательно, у уравнения $x^3 + 4x^2 + 7x + 6 = 0$ один из корней $x = -2$. Значит,

$x^3+4x^2+7x+6 = (x+2)(x^2+2x+3) = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет единственный корень $x = -2$ (т.к. дискриминант второй скобки отрицателен). Значит, значение $b = -7$ – подходит. Следовательно, $a = \dfrac{385}{128}$.

б) $b = 15$. Функции имеют общую точку $x = 2$, следовательно, у уравнения $x^3 + 4x^2 - 15x + 6 = 0$ один из корней $x = 2$. Значит,

$x^3 + 4x^2 - 15x + 6 = (x-2)(x^2+6x-3) = (x-2)(x-(-3-2\sqrt{3}))(x-(-3+2\sqrt{3})) = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня $x = 2$ и $x = -3 + 2\sqrt{3}$ на отрезке $[-2; 2]$. Значит, значение $b = 15$ не подходит.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три различных решения.

(ЕГЭ 2016, досрочная волна)

Ответ

$a \in (0;1) \cup (1;4)$

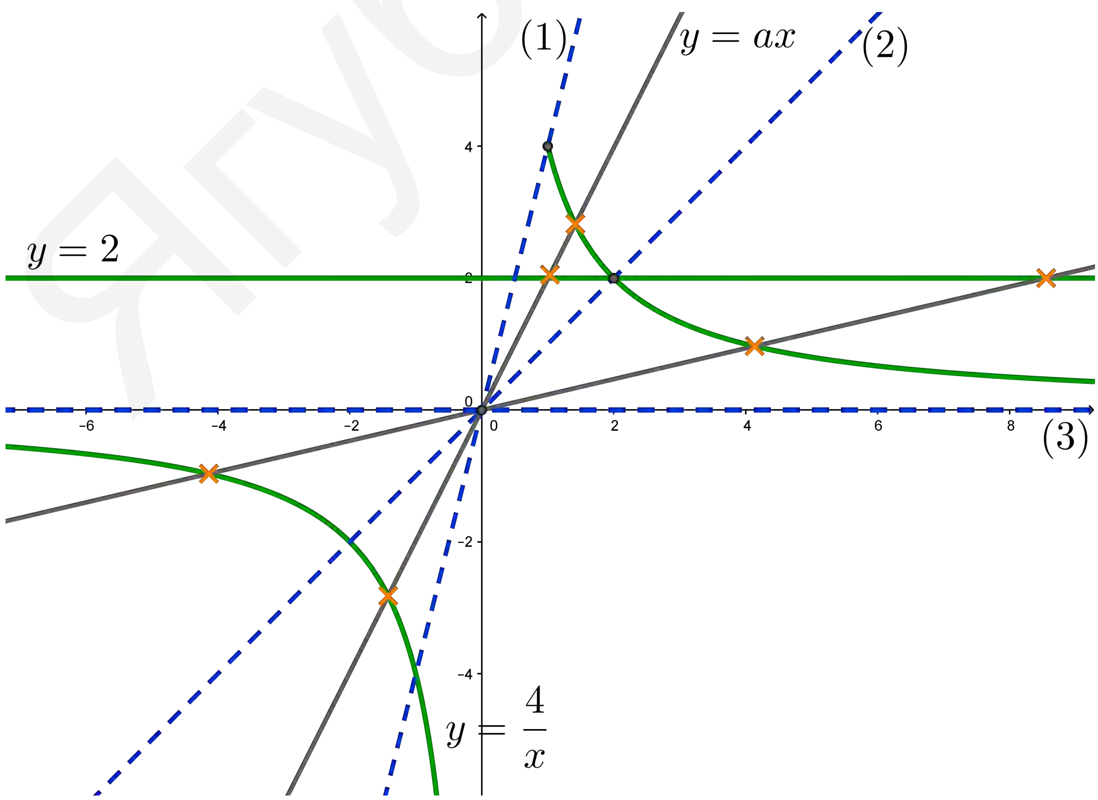
Решение

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} xy(y-2) - 4(y-2) = 0 \\ 4 - y > 0 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(xy-4) = 0 \\ y < 4 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{array} \right. \\ y < 4 \\ y = ax \end{cases}$$

Таким образом, необходимо найти значения параметра, при каждом из которых прямая $y = ax$ пересекает в трех точках график системы $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{array} \right. \\ y < 4 \end{cases}$

Рассмотрим рисунок:



Из рисунка видно, что три точки будут тогда, когда прямая $y = ax$ находится между положениями (1) и (3), не включая их и положение (2). На рисунке положения (1),(2),(3) отмечены синим пунктиром, примеры подходящего положения прямой $y = ax$ серым цветом, а график системы зеленым.

1) Найдем значение параметра, соответствующее положению (1).
Тогда прямая $y = ax$ проходит через точку $(1;4)$, следовательно: $a = 4$.

2) Найдем значение параметра, соответствующее положению (2).
Тогда прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения $y = \frac{4}{x}$ и $y = 2$, то есть через $(2;2)$, следовательно, $a = 1$.

3) Найдем значение параметра, соответствующее положению (3).
Тогда прямая $y = ax$ совпадает с осью Ox, то есть с прямой $y = 0$, следовательно, $a = 0$.

Таким образом, при $a \in (0;1) \cup (1;4)$ изначальная система имеет три различных решения.

Задача 18

Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$y = 3 \cdot |2x + a| + 2 \cdot |x^2 - x - 2|$$

меньше 4.

(ЕГЭ 2016, досрочная волна)

Ответ

$a \in \left(-\dfrac{16}{3}; -2\right) \cup \left(0; \dfrac{10}{3}\right)$

Решение

Условие данной задачи можно переформулировать следующим образом: при каких a существует хотя бы одна точка на графике функции y, которая находится ниже прямой $y = 4$, или, что то же самое:

$$3 \cdot |2x + a| + 2 \cdot |x^2 - x - 2| < 4 \quad \text{имеет хотя бы одно решение.}$$

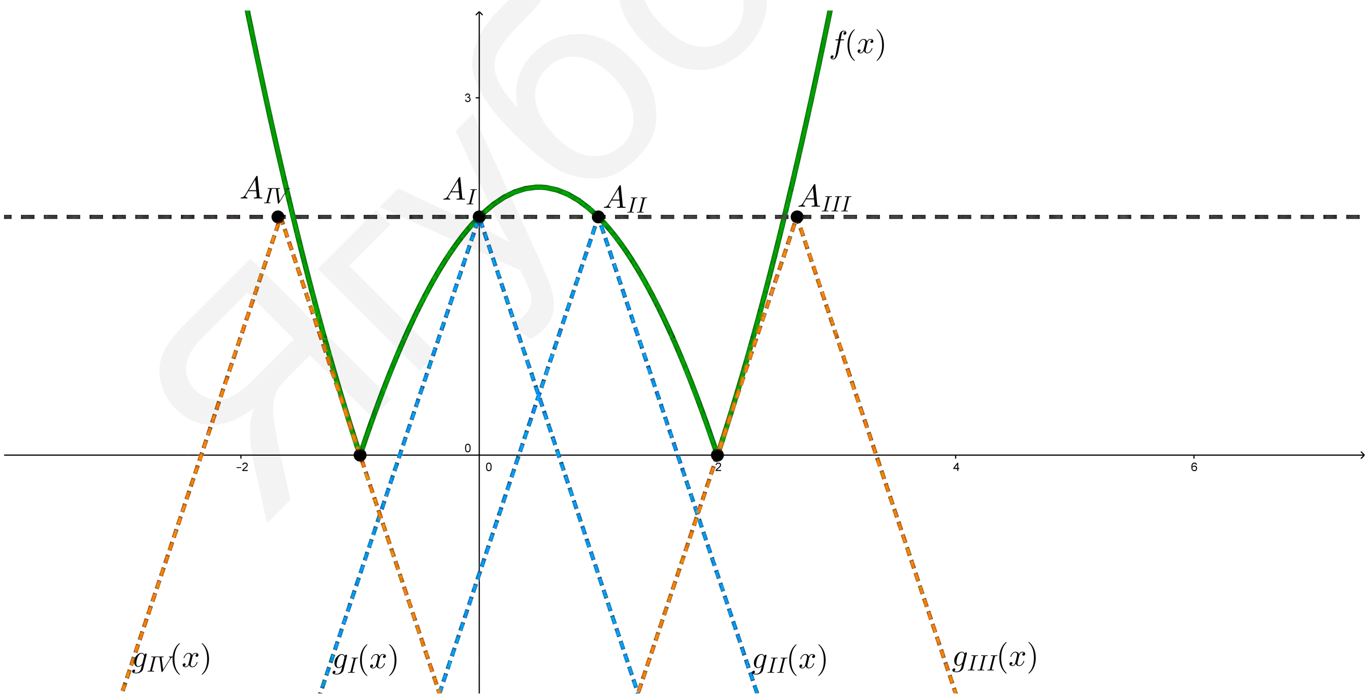
Сделаем замену $-\frac{1}{2}a = b$. Тогда неравенство перепишется в виде:

$$6|x - b| + 2|x^2 - x - 2| < 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - x - 2| < 2 - 3|x - b|$$

Рассмотрим две функции: $f(x) = |x^2 - x - 2|$ и $g(x) = 2 - 3|x - b|$. График функции $g(x)$ при каждом фиксированном b представляет собой угол, ветви которого направлены вниз, а вершина находится в точке $(b; 2)$.

Тогда смысл неравенства таков: необходимо найти те значения b, при которых существует хотя бы одна точка X графика $f(x)$, находящаяся ниже графика функции $g(x)$.

Найдем те значения b, когда **не существует** таких точек X: то есть когда все точки графика $f(x)$ находятся не ниже точек графика $g(x)$. Тогда в ответ пойдут все значения b, кроме найденных.



1) Рассмотрим значения b, при которых вершина угла находится между точкой A_I и точкой A_{II} (включая эти точки). В этом случае все точки графика $f(x)$ находятся не ниже точек графика $g(x)$. Найдем эти значения b:

точка A_I имеет координаты $(0; 2)$, следовательно, $b = 0$; точка A_{II} имеет координаты $(1; 2)$, следовательно, $b = 1$. Значит, при всех $b \in [0; 1]$ все точки графика $f(x)$ не ниже точек графика $g(x)$.

Заметим, что когда вершина угла находится между точками A_{II} и A_{III}, то всегда есть хотя бы одна точка графика $f(x)$, находящаяся ниже графика $g(x)$.

2) Так происходит до тех пор, пока вершина не будет в точке A_{III} — когда левая ветвь $g(x)$ касается правой ветви $f(x)$ в точке x_0; и в этом случае снова все точки графика $f(x)$ находятся не ниже $g(x)$. Найдем это значение b.

Правая ветвь $f(x)$ задается уравнением $y = x^2 - x - 2, x \geqslant 2$; левая ветвь $g(x)$ задается уравнением $y_1 = 2 + 3(x - b), x \leqslant b$.

$(x^2 - x - 2)' = 2x - 1, \quad 2x_0 - 1 = 3 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y(2) = y_1(2) \Rightarrow b = \dfrac{8}{3}.$

Значит, при всех $b \geqslant \dfrac{8}{3}$ все точки графика $f(x)$ будут находиться не ниже точек графика $g(x)$.

3) Аналогично рассматривается случай, когда вершина угла находится в точке A_{IV} или левее (правая ветвь $g(x)$ касается левой ветви $f(x)$). В этом случае $b \leqslant -\dfrac{5}{3}$.

Таким образом, мы нашли значения b, когда все точки графика $f(x)$ будут находиться не ниже точек графика $g(x)$. Значит, в ответ должны пойти все значения b, кроме найденных, а это: $b \in \left(-\dfrac{5}{3}; 0\right) \cup \left(1; \dfrac{8}{3}\right)$.

Перейдем теперь к a: т.к. $b = -\frac{1}{2}a$, то $a \in \left(-\dfrac{16}{3}; -2\right) \cup \left(0; \dfrac{10}{3}\right)$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - 3a}$$

(ЕГЭ 2016, основная волна)

Ответ

$a \in (-3; 0) \cup (0; 3]$.

Решение

Сделаем замену $2^x = t, t > 0$. Тогда уравнение примет вид:

$t - a = \sqrt{t^2 - 3a}$. Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (t-a)^2 = t^2 - 3a \\ t - a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{a+3}{2}, \text{ если } a \neq 0 \\ t \geqslant a \end{cases}$$

Заметим, что если $a = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений $t \geqslant 0$.

Для того, чтобы уравнение имело 1 решение, необходимо, чтобы $\dfrac{a+3}{2} \geqslant a$ и $\dfrac{a+3}{2} > 0 \Leftrightarrow -3 < a \leqslant 3$. Учитывая то, что $a \neq 0$, получаем $a \in (-3; 0) \cup (0; 3]$.

Задача 18

Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2}+\frac{x-1}{x-a}=1$$

имеет единственный корень.

(ЕГЭ 2016, основная волна)

Ответ

$\left\{\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}; -1; 1; \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

Решение

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$\frac{x^2-(2a+1)x+(2a^2+2a-2)}{(x+2)(x-a)}=0$$

Данное уравнение будет иметь единственный корень, если:

1) квадратное уравнение в числителе имеет один корень x_o, причем $x_o \neq -2, x_o \neq a$.

Рассмотрим

$$y(x)=x^2-(2a+1)x+(2a^2+2a-2)=0$$
$$D=-4a^2-4a+9$$
$$D=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$$

Тогда $x_o=\dfrac{2a+1}{2}$.

С помощью проверки убеждаемся, что при найденных значениях a: $x_o \neq -2, x_o \neq a$.

2) квадратное уравнение в числителе имеет два корня x_1 и x_2, причем **только** один из них равен -2 или a.

Значит,

$$\begin{cases} D>0 \\ \left[\begin{array}{l} y(-2)=0 \\ y(a)=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}\right) \\ \left[\begin{array}{l} a^2+3a+2=0 \\ a^2+a-2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=1 \end{array}\right. \quad \text{т.к. при } a=-2: \quad y(-2)=0 \text{ и } \ y(a)=0$$

Таким образом, $a \in \left\{\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}; -1; 1; \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$$

имеет ровно три различных решения.

(ЕГЭ 2016, основная волна)

Ответ

$a \in [-4;-3) \cup (-3;3) \cup (3;4]$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 15x^2+6ax+9=(x^2+ax+3)^2 \\ x^2+ax+3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$15x^2+6ax+9=(x^2+ax+3)^2 \Leftrightarrow x^2(x^2+2ax+a^2-9)=0 \Leftrightarrow x^2(x+a-3)(x+a+3)=0.$$

Таким образом, это уравнение имеет три корня: $x_1=0, x_2=3-a, x_3=-3-a$.

Для того, чтобы вся система имела три различных корня, необходимо выполнение двух условий:

1) $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Следовательно, $a \neq -3; 3$.

2) $x_1^2+ax_1+3 \geqslant 0,\ x_2^2+ax_2+3 \geqslant 0,\ x_3^2+ax_3+3 \geqslant 0$. Следовательно, $a \in [-4;4]$.

Таким образом, $a \in [-4;-3) \cup (-3;3) \cup (3;4]$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{8x^2+4ax+4}=x^2+ax+2$$

имеет ровно три различных решения.

(ЕГЭ 2016, основная волна)

Ответ

$a\in[-3;-2)\cup(-2;2)\cup(2;3]$

Решение

Сделаем преобразования:

$$\sqrt{8x^2+4ax+4}=x^2+ax+2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}8x^2+4ax+4=(x^2+ax+2)^2\\ x^2+ax+2\geqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^4+2ax^3+a^2x^2-4x^2=0\\ x^2+ax+2\geqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=2-a\\ x_3=-2-a\end{array}\right.\\ x^2+ax+2\geqslant 0\end{cases}$$

Для того, чтобы система имела три различных решения, необходимо, чтобы все три корня были различны и удовлетворяли неравенству $x^2+ax+2\geqslant 0$.

Заметим, что при всех $a\neq\pm2$ все три корня различны, значит, необходимо, чтобы:

$$\begin{cases}0^2+a\cdot 0+2\geqslant 0\\ (2-a)^2+a(2-a)+2\geqslant 0\\ (-2-a)^2+a(-2-a)+2\geqslant 0\\ a\neq\pm2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\leqslant 3\\ a\geqslant -3\\ a\neq\pm2\end{cases}$$

Значит, $a\in[-3;-2)\cup(-2;2)\cup(2;3]$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+2)(2y+5x-2)=|2+x|^3\\ y=-x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

(ЕГЭ 2016, резервный день)

Ответ

$(2,875;4)\cup(4;5,125)$

Решение

Подставим второе уравнение в первое:

$$(x+2)(3x-2+2a)=|2+x|^3$$

При любых a у данного уравнения есть решение $x=-2$. Рассмотрим два случая:

1) $x>-2$, тогда

$$3x-2+2a=(x+2)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+x+6-2a=0$$

2) $x<-2$, тогда

$$-3x+2-2a=(x+2)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+7x+2+2a=0$$

По условию задачи требуется найти такие a, что исходная система имеет ровно четыре решения. Это равносильно тому, что в одном из случаев 1), 2) подходят два корня, а в другом один корень.

Дискриминанты уравнений в случаях 1) и 2):

$$D_1=8a-23, \qquad D_2=41-8a$$

так как в обоих случаях корни должны быть, то $\dfrac{23}{8}\leqslant a\leqslant\dfrac{41}{8}$.

Пусть в случае 1) подходят два корня, а в случае 2) один корень (обозначим их соответствующими индексами):

$$x_1=\frac{-1\pm\sqrt{8a-23}}{2}, \qquad x_2=\frac{-7\pm\sqrt{41-8a}}{2}$$

тогда

$$\begin{cases}\dfrac{-1-\sqrt{8a-23}}{2}>-2\\ 8a-23>0\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\sqrt{8a-23}<3\\ 8a-23>0\end{cases}$$

откуда получаем, что $\dfrac{23}{8}<a<4$. При этом в случае 2) среди корней

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{41-8a}}{2}$$

условию $x<-2$ удовлетворяет ровно один корень (т.к. тогда $\sqrt{41-8a}>3$), следовательно, все $\dfrac{23}{8}<a<4$ идут в ответ.

Пусть в случае 1) подходит один корень, а в случае 2) два корня (обозначим их соответствующими индексами):

$$x_1=\frac{-1\pm\sqrt{8a-23}}{2}, \qquad x_2=\frac{-7\pm\sqrt{41-8a}}{2}$$

тогда

$$\begin{cases} \dfrac{-7+\sqrt{41-8a}}{2} < -2 \\ 41-8a > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{41-8a} < 3 \\ 41-8a > 0 \end{cases}$$

откуда получаем, что $4 < a < \dfrac{41}{8}$. При этом в случае 1) среди корней

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{8a-23}}{2}$$

условию $x > -2$ удовлетворяет ровно один корень (т.к. тогда $\sqrt{8a-23} > 3$), следовательно, все $4 < a < \dfrac{41}{8}$ идут в ответ.

Так как мы рассмотрели все возможные случаи, то ответ:

$$a \in (2,875; 4) \cup (4; 5,125)\,.$$

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3 \\ y = x+a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

(ЕГЭ 2016, резерв)

Ответ

$a \in (-7;-3) \cup (-3;1)$.

Решение

Система равносильна уравнению: $(x-3)(4x+a-9) = |x-3|^3$, что равносильно:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(4x+a-9-(x-3)^2) = 0 \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3)(4x+a-9+(x-3)^2) = 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (x-3)(x^2-10x+18-a) = 0 \\ x \geqslant 3 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} (x-3)(x^2-2x+a) = 0 \\ x < 3 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Данная система будет иметь 4 решения в одном из следующих случаев:

1) Система (1) имеет 3 решения, а система (2) – 1 решение.

Для того, чтобы (1) имела 3 решения, необходимо, чтобы уравнение $x^2-10x+18-a=0$ имело два корня и оба корня удовлетворяли условию $x>3$ (ни один из корней не может быть равен 3, потому что в этом случае система будет иметь 2 различных решения, а не 3).

Обозначим $f(x) = x^2-10x+18-a$. Тогда необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} D = 4(7+a) > 0 \\ f(3) > 0 \\ \dfrac{10}{2} > 3 \ \text{(вершина параболы находится правее 3)} \end{cases}$$

Решив данную систему, получим $a \in (-7;-3)$.

Для того, чтобы (2) имела 1 решение, необходимо выполнение одного из двух условий:

а) либо уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет 1 корень и он меньше 3, т.е.

$$\begin{cases} D = 4(1-a) = 0 \\ \dfrac{2}{2} < 3 \ \text{(вершина параболы находится левее 3)} \end{cases}$$

Следовательно, $a = 1$.

б) либо уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет 2 корня (обозначим $g(x) = x^2-2x+a$) и эти корни находятся по разные стороны от 3, т.е.:

$$\begin{cases} D = 4(1-a) > 0 \\ g(3) < 0 \end{cases}$$

Следовательно, $a < -3$.

Пересекая $a \in (-7;-3)$ с $a \in (-\infty;-3) \cup \{1\}$, получим $a \in (-7;-3)$.

2) Система (1) имеет 2 решения и система (2) – 2 решения.

Для того, чтобы (1) имела 2 решения, необходимо, чтобы либо уравнение $x^2-10x+18-a=0$ имело 1 корень, либо чтобы оно имело 2 корня, но только один из них был бы больше 3. Следовательно, $a \in \{-7\} \cup (-3;+\infty)$.

Для того, чтобы (2) имела 2 решения, необходимо, чтобы уравнение $x^2-2x+a=0$ имело 2 корня, причем оба корня были меньше 3. Следовательно, $a \in (-3;1)$.

Пересекая $a \in \{-7\} \cup (-3;+\infty)$ с $a \in (-3;1)$, получим $a \in (-3;1)$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax \geqslant 2 \\ 3x \leqslant 2a + 11 \\ \sqrt{x-1} > a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $[3; 4]$.

(ЕГЭ 2017, досрочная волна)

Ответ

$\left[\dfrac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$

Решение

1) Рассмотрим случай, когда $a > 0$. В этом случае систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{a} \\ x \leqslant \dfrac{2a+11}{3} \\ x > a^2 + 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Для того, чтобы система имела решения, нужно, чтобы

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a} \leqslant \dfrac{2a+11}{3} \\ a^2 + 1 < \dfrac{2a+11}{3} \end{cases}$$

Решением неравенства $\dfrac{2}{a} \leqslant \dfrac{2a+11}{3}$ будут $a \in (-\infty; -6] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Так как $a > 0$, то подходит только $a \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Решением неравенства $a^2 + 1 < \dfrac{2a+11}{3}$ будут $a \in (0; 2)$. Следовательно, пересекая полученные решения, имеем: $a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right)$. Таким образом, при этих a система $(*)$ будет иметь решения.

Теперь посмотрим, когда хотя бы одно из этих решений будет лежать в отрезке $[3; 4]$.

Заметим, что при полученных a числа $\dfrac{2}{a}$; $a^2 + 1$; $\dfrac{2a+11}{3}$ могут располагаться в следующем порядке:

$I.\quad \dfrac{2}{a};\ a^2+1;\ \dfrac{2a+11}{3} \quad \Rightarrow$ тогда решением системы (*) будут $x \in \left(a^2+1; \dfrac{2a+11}{3}\right]$

$II.\quad \dfrac{2}{a} = a^2+1;\ \dfrac{2a+11}{3} \quad \Rightarrow$ тогда решением системы (*) будут $x \in \left(a^2+1; \dfrac{2a+11}{3}\right]$

$III.\quad a^2+1;\ \dfrac{2}{a};\ \dfrac{2a+11}{3} \quad \Rightarrow$ тогда решением системы (*) будут $x \in \left[\dfrac{2}{a}; \dfrac{2a+11}{3}\right]$

I и II случаи задаются условием $\dfrac{2}{a} \leqslant a^2 + 1$.
В этих случаях для того, чтобы хотя бы одно решение попало в отрезок $[3; 4]$, нужно, чтобы $a^2 + 1 < 4$.

Следовательно, решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a} \leqslant a^2+1 \\ a^2+1<4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a^3+a-2 \geqslant 0 \\ a^2<3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (a-1)(a^2+a+2) \geqslant 0 \\ a^2<3 \end{cases}$$

Следовательно, учитывая, что $a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right)$, решением системы будут: $a \in [1; \sqrt{3})$.

Случай III задается условием $a^2+1<\dfrac{2}{a}$.
В этом случае для того, чтобы хотя бы одно решение попало в отрезок $[3; 4]$, нужно, чтобы $\dfrac{2}{a} \leqslant 4$.
Следовательно, решим систему:

$$\begin{cases} a^2+1<\dfrac{2}{a} \\ \dfrac{2}{a} \leqslant 4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a^3+a-2<0 \\ a \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Следовательно, учитывая, что $a \in \left[\frac{1}{2}; 2\right)$, решением системы будут: $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Так как нам подходит или случай I, или II, или III, то значения a, полученные в этих случаях, нужно объединить. Объединяя $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$ и $[1; \sqrt{3})$, получим

$$a \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right).$$

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x| + |a| \leqslant 4 \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 0]$.

(ЕГЭ 2017, досрочная волна, резерв)

Ответ

$(8 - 8\sqrt{2}; 4]$

Решение

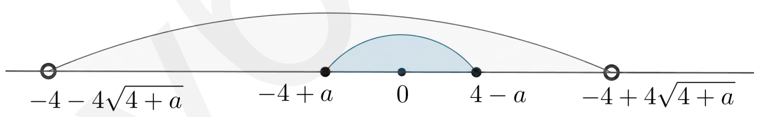
1 способ. Алгебраический

Заметим, что при $|a| > 4$ первое неравенство системы не будет иметь решений (так как тогда $|x|$ должен быть не больше отрицательного числа), следовательно, и вся система не будет иметь решений.
При $|a| = 4$ решением первого неравенства будет $x = 0$ ($\in [-1; 0]$). Заметим, что пара $x = 0$ и $a = 4$ является решением второго неравенства, пара $x = 0$ и $a = -4$ – нет.
Следовательно, $a = 4$ – подходит.

1) Пусть $0 < a < 4$. Тогда $|a| = a$ и система перепишется в виде:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 4 - a \\ (x+4)^2 < 16(a+4) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4 + a \leqslant x \leqslant 4 - a \\ -4 - 4\sqrt{4+a} < x < -4 + 4\sqrt{4+a} \end{cases}$$

Заметим, что $-4 + a < 0$; $-4 + 4\sqrt{4+a} > 4 > 4 - a$, $-4 - 4\sqrt{4+a} < -4 + a$, следовательно:



Таким образом, решением системы будут $x \in [-4 + a; 4 - a]$, что содержит хотя бы одну точку из $[-1; 0]$ (например, $x = 0$).
Таким образом, все $a \in (0; 4)$ – подходят.

2) При $a = 0$ система перепишется в виде:

$$\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ -12 < x < 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leqslant x < 4$$

Следовательно, $a = 0$ – подходит.

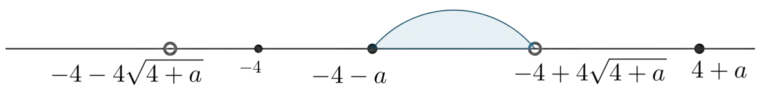
3) Пусть $-4 < a < 0$. Тогда $|a| = -a$ и система примет вид:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 4 + a \\ (x+4)^2 < 16(4+a) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4 - a \leqslant x \leqslant 4 + a \\ -4 - 4\sqrt{4+a} < x < -4 + 4\sqrt{4+a} \end{cases}$$

Заметим, что $-4 - a > -4$, а $-4 - 4\sqrt{4+a} < -4$. Также $-4 + 4\sqrt{4+a} \leqslant 4 + a$ (так как $(4+a) - 4\sqrt{4+a} + 4 \geqslant$

$0 \;\Rightarrow\; (\sqrt{4+a}-2)^2 \geqslant 0$ – верно при всех $a \in (-4;0)$)

Следовательно, нам подходит такая картинка:



То есть $-4+4\sqrt{4+a}$ должно быть больше $-4-a$ (тогда решением будут $x \in [-4-a; -4+4\sqrt{4+a})$), а также больше -1 (тогда хотя бы одно число из $[-1;0]$ будет содержаться в решении).

$$\begin{cases} -4+4\sqrt{4+a} > -4-a \\ -4+4\sqrt{4+a} > -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 8-8\sqrt{2} < a < 0 \\ a > -\dfrac{55}{16} \end{cases}$$

(так как $a \in (-4;0)$).

Для того, чтобы дать окончательный ответ, нужно сравнить числа $8-8\sqrt{2}$ и $-\frac{55}{16}$:

$$8\sqrt{2}-8 \vee \frac{55}{16}$$

$$128\sqrt{2} \vee 183$$

$$32768 \vee 33489$$

Следовательно, $8\sqrt{2}-8 < \dfrac{55}{16}$, значит, $8-8\sqrt{2} > -\dfrac{55}{16}$, следовательно, $a \in (8-8\sqrt{2};0)$.

Тогда окончательный ответ для a:

$$a \in (8-8\sqrt{2};4]$$

2 способ. Геометрический

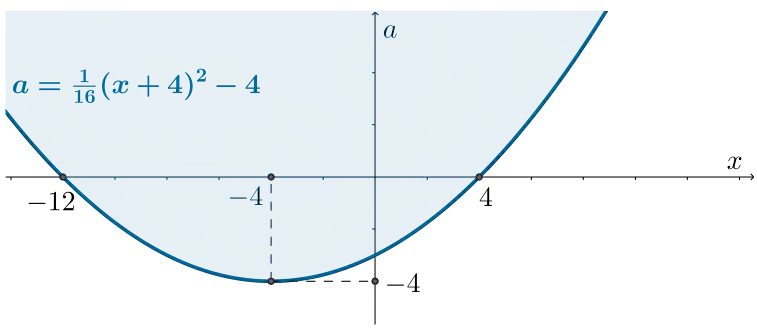
Рассмотрим прямоугольную систему координат xOa, где ось Oa — ось ординат.

Изобразим область, являющуюся решением системы. Тогда те значения a, при которых существуют точки $(x;a)$ из этой области с $x \in [-1;0]$, пойдут в ответ.

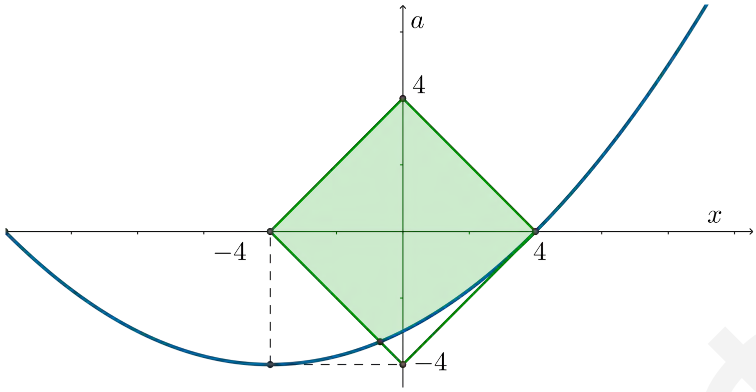
Второе неравенство системы можно переписать в виде

$$a > \frac{1}{16}(x+4)^2-4$$

Следовательно, оно задает область между ветвями параболы $a = \frac{1}{16}(x+4)^2-4$ (ветви параболы направлены вверх). Вершина параболы находится в точке $(-4;-4)$, пересекает ось абсцисс парабола в точках $x=-12$ и $x=4$ (находятся из уравнения $0 = \frac{1}{16}(x+4)^2-4$).



Изобразим область, являющуюся решением первого неравенства. При x, a из I четверти (то есть $x > 0, a > 0$) неравенство переписывается в виде $x + a \leqslant 4 \quad \Rightarrow \quad a \leqslant 4 - x$ и задает область первой четверти, находящуюся под прямой. Аналогично рассмотрев по отдельности случаи, когда x, a лежат в II, III и IV четвертях, найдем, что первое неравенство задает внутренность квадрата:



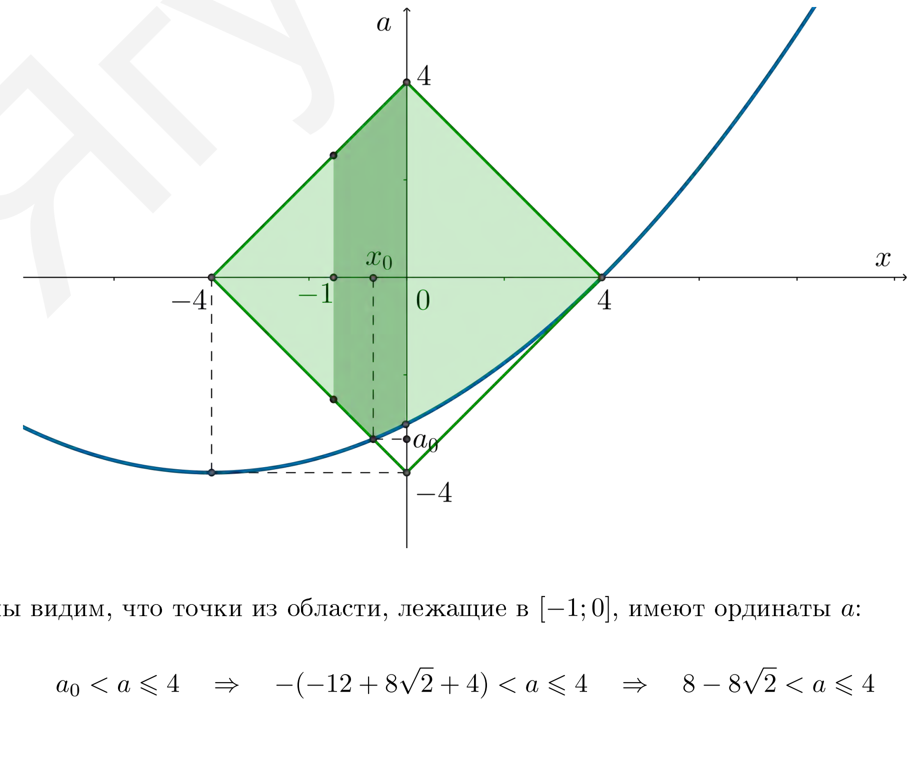
Тогда зеленая область – область, являющаяся решением системы.
Найдем все $x \in [-1; 0]$ и лежащие в это области. Для этого необходимо найти точку $(x_0; a_0)$ пересечения параболы со стороной квадрата из III четверти и понять, правее или левее -1 ее абсцисса x_0 (заметим, что эта точка не будет лежать в области, так как граница области, являющаяся частью параболы, не входит в область).
Сторона квадрата в III четверти задается уравнением $-x - a = 4$, откуда $a = -(x+4)$. Следовательно,

$$-(x+4) = \frac{1}{16}(x+4)^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x+12)^2 = 2 \cdot 64 \quad \Leftrightarrow \quad x = -12 \pm 8\sqrt{2}$$

Так как $x_0 \in (-4; 0)$, то подходит $x_0 = -12 + 8\sqrt{2}$. Сравним $-12 + 8\sqrt{2}$ и -1:

$$12 - 8\sqrt{2} \vee 1$$
$$11 \vee 8\sqrt{2}$$
$$121 \vee 128$$

Следовательно, $12 - 8\sqrt{2} < 1$, значит, $-12 + 8\sqrt{2} > -1$.



Таким образом, мы видим, что точки из области, лежащие в $[-1; 0]$, имеют ординаты a:

$$a_0 < a \leqslant 4 \quad \Rightarrow \quad -(-12 + 8\sqrt{2} + 4) < a \leqslant 4 \quad \Rightarrow \quad 8 - 8\sqrt{2} < a \leqslant 4$$