МИНИСТЕРСТВО БЕЗДАРНЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

представляет:

Невероятное методическое пособие по математике для решения задачи №17 профильного ЕГЭ-2016

Издание 2-е, дополненное

Черкесск–2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

По сложившейся традиции – здравствуй, дорогой случайный читатель!

Автор книжки – Эдуард Джендубаев – как и всегда выражает неимоверную благодарность и признательность всем тем, кто, встретившись с его работами, не ругался матерными словами.

Второе издание первой в России книги, посвященной экономической задаче профильного ЕГЭ по математике, ты сейчас и читаешь. От книги [1] она отличается объемом, разнообразием формулировок, полезностью (в эту книгу вошли задачи реальных вариантов ЕГЭ-2015, которые я смог найти на просторах интернета, и задачи пробных вариантов 2016 года), многообразием методов решения и серьезностью в оформлении.

Следует сразу сказать, что в 2015 году экономическая задача появилась впервые и экономической её сначала называли все, кроме меня (даже в самом демоварианте 2015 года есть формулировка "с экономическим содержанием"), а затем и я стал её так называть. В 2015 году эта задача была под номером 19.

Сейчас, уже в 2016 году, задача наша обрела номер 17. И теперь стало ясно, что формулировка задачи вовсе и не обязательно содержит слова "кредит, процент, ставка, остаток, долг, срок, месяц, год, платеж, транш, сумма, ссуда, валюта, пенсионер, Ярослав, Мария, Владимир Петрович, банк, ипотека, Большой адронный коллайдер".

В этой связи я обязан попросить прощения у всех, кто сдавал ЕГЭ в 2015 году и кого, быть может, немного обнадежила книга [1] отсутствием разнообразных формулировок задачи 17.

О ЗАДАЧЕ №17

Я честно говоря не понимаю до сих пор, что происходит в некоторых задачах.

Давайте разберемся хоть в чем-нибудь.

Что происходит, когда мы кладем в банк на *N* лет некоторую сумму *S* под *r*% годовых?

Прошел год, и к нам на счет поступает *r*% от нашего первоначального вклада:

$$S + r\%S = (1 + r\%)S.$$

После второго года произойдет примерно то же самое

$$(1 + r\%)S + r\% \cdot (1 + r\%)S = (1 + r\%)^2S.$$

По прошествии *N* лет, после начисления последних процентов, наш вклад достигнет величины, равной

$$(1 + r\%)^NS = q^NS.$$

Здесь q называют коэффициентом увеличения, что логично.

Давайте теперь возьмем кредит в размере *S* под *r*% годовых сроком на *N* лет. Будем возвращать его равными платежами, размером a.

Прошел год, наш долг банку увеличился на заявленные проценты, а мы платим заявленный платеж. К концу года долг перед банком будет иметь вид

$$(1 + r\%)S - a.$$

Проходит еще год:

$$(1 + r\%) \cdot \big((1 + r\%)S - a\big) - a = (1 + r\%)^2S - \big(1 + (1 + r\%)\big)a.$$

К концу договора мы отдаем долг полностью, его величина становится равной нулю и это равенство запишется таким образом:

$$q^NS - (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1})a = 0.$$

Для порядка можем применить формулу суммы членов геометрической прогрессии:

$$q^NS - \frac{q^N - 1}{q - 1} \cdot a = 0.$$

Что-то похожее на правду.

Представим, что нам ничего не известно про задачу 17. Открываем демовариант и смотрим разбор.

Задача (0) из демоварианта ЕГЭ-2016 (она же и из демоварианта 2015 года) по математике профильного уровня.

► 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение из демоварианта

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k%. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \frac{m^3-1}{m-1} \cdot x = 0$, откуда $x = \frac{am^3(m-1)}{m^3-1}$.

При a = 9 930 000 и k = 10, получаем: m = 1,1 и

$$x = \frac{9\ 390\ 000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3\ 993\ 000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей. ◄

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для ежегодного платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
С помощью верных рассуждений получено уравнение, из которого может быть найдено значение ежегодного платежа, но коэффициенты уравнения неверные из-за ошибки в вычислениях	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ничто не предвещает беды, но кажущаяся простота задачи из демоварианта очень скоро сыграет чудовищно злую шутку.

Задача (23).

► Андрей не поступил в университет на бюджетное отделение. Стоимость обучения в университете на коммерческой основе составляет 100 тысяч рублей в год. Отец Андрея взял кредит на 2 года в размере 100 000 рублей (то есть либо он думает, что ко второму курсу Андрей вылетит, либо переведется на бюджет своим самоотверженным трудом и знаниями).

В течение двух лет ежемесячно выплачивается одна и та же сумма. Она состоит из двух частей. Первая является суммой выплат в счет погашения основного долга по кредиту, вторая составляет 2% от суммы, оставшейся после выплат в счет погашения кредита за предыдущий месяц. Докажите, что:

а) ежемесячная постоянная сумма выплат равна

$$100\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{24}}{(1+0{,}02)^{24}-1};$$

б) сумма переплат по кредиту не больше 48 000 рублей.

Решение

Если S – начальная сумма кредита, q – коэффициент увеличения, s – ежемесячная выплата, то можно составить уравнение равенства нулю долга по прошествии 24 месяцев:

$$q^{24}S - \frac{q^{24}-1}{q-1}s = 0.$$

Подставим в это выражение данное число и проверим равенство.

$$q^{24}S - \frac{q^{24}-1}{q-1} \cdot \left(S \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{24}}{q^{24}-1}\right) = 0.$$

$$q^{24} - q^{24} = 0.$$

Действительно, равенство верное – утверждение а) задачи доказано.

Доказать второе утверждение я не смог.

Ответ: а) утверждение доказано.

Как доказывать второе утверждение этой задачи? Варианты записи могут быть такими:

$$q^{24}S - S \le 48\,000, \qquad q^{24} \le 1{,}48.$$

А может быть от суммы всех ежемесячных платежей отнять изначальную сумму кредита и результат сравнить с 48 000?

$$24 \cdot S \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{24}}{q^{24}-1} - S \le 48\,000, \qquad 0{,}48 \cdot \frac{q^{24}}{q^{24}-1} \le 1{,}48, \qquad 1{,}48 \le q^{24}.$$

Получили что-то удивительное. С другой стороны, оба неравенства нестрогие, может быть за доказательство "прокатит" подстановка $q^{24} = 1{,}48$?

$$1{,}48S - \frac{1{,}48-1}{q-1} \cdot S \cdot (q-1) \cdot \frac{1{,}48}{1{,}48-1} = 1{,}48S - 1{,}48S = 0.$$

Равенство верное, хотя и не верится в то, что $q^{24} = 1{,}48$. И действительно,

$$1{,}02^{24} \approx 1{,}60843724948 \ldots$$

Это всё очень странно. Но худшее, как это обычно и бывает, впереди.

Задача (24).

► Лидия положила некоторую сумму на счет в банке на полгода. По этому вкладу установлен «плавающий» процент, то есть число начисленных процентов зависит от числа полных месяцев нахождения вклада на счете.

В таблице представлены условия начисленных процентов.

Срок вклада	1–2 месяца	3–4 месяца	5–6 месяцев
Ставка в % годовых	6%	18%	12%

На сколько процентов сумма на счете Лидии при таких условиях больше суммы, положенной Лидией на счет, если каждый месяц, за исключением последнего, после начисления процентов банком она добавляет на счет такую сумму, чтобы за месяц вклад увеличился на 10% от первоначального вклада?

Размышления

Я так понял, что первые два месяца коэффициент увеличения будет 1,06, следующие два 1,18 и наконец 1,12. Интересно то, что после двух месяцев банк увеличивает имеющуюся сумму на проценты, больше 10 от имеющейся суммы, которая явно, после двух-то месяцев, уже точно больше изначального вклада.

Каким образом при этом Лидия осуществляет такую хитрую прибавку – вопрос, что называется, на миллион долларов.

Как бы там ни было, а **ответ** к этой задаче 7,7%.

Двигаемся дальше и здесь нам попадается фантастический пример решения задачи из учебно-методических материалов для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2015 года, часть 1 (это, опять же, бесплатный государственный источник – документ от ФИПИ, как и демовариант. Даже я, кем бы я там ни был, вижу, что в тексте этого документа не хватает множества запятых).

Я сам ничего не понял, просто перепишу вам решение этой задачи.

Задача (7).

► Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 \le t \le 55$. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации.

Так как $3364 = 58^2$, то $x^2 + y^2 = 3364$ задает окружность ω радиуса 58 с центром в начале координат. Проведем целевой вектор $\vec{a}(20;\ 21)$ и перпендикулярную ему прямую l: $20x + 21y = 0$, проходящую через начало координат. Луч, коллинеарный вектору $\vec{a}(20;\ 21)$, пересечет окружность ω в точке $A(40;\ 42)$. Прямая m, проходящая через точку $A(40;\ 42)$ и перпендикулярная вектору $\vec{a}(20;\ 21)$, будет касаться окружности ω и задаваться уравнением m: $20x + 21y = C$ со значением C, наибольшим среди всех прямых, параллельных l и пересекающих ω.

Условия $25 \le x \le 55$, $25 \le y \le 55$ для точки $A(40;\ 42)$ выполнены. Значит,

$$C_{\text{наиб}} = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682.$$

Ответ: 1682. ◄

«Думайте сами, решайте сами» в чистом виде.

На этом наши приключения не заканчиваются.

Задача (12). «По-детски».

► 15-го января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение

Если X – сумма кредита, q – множитель роста кредита, a_i – величина i-го платежа, то несложно восстановить картину осуществления возврата кредита:

$$qX - a_1$$

$$q^2X - qa_1 - a_2$$

$$q^3X - q^2a_1 - qa_2 - a_3$$

$$\dots$$

$$q^{14}X - (q^{13}a_1 + q^{12}a_2 + \dots + a_{14}) = 0.$$

В левой части последнего уравнения записана разность величины долга за 14 месяцев и суммы всех платежей.

По условию задачи, сумма выплат после полного погашения на 15% больше суммы, взятой в кредит. Получим уравнение:

$$q^{14}X = 1{,}15X, \qquad q = \sqrt[14]{1{,}15}, \qquad r = \left(\sqrt[14]{1{,}15} - 1\right) \cdot 100.$$

Ответ: $\left(\sqrt[14]{1{,}15} - 1\right) \cdot 100.$ ◄

Думаете, это правильное решение? Ничего подобного.

Задача (12). «По-взрослому»

► 15-го января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r*% по сравнению с концом предыдущего месяца;

со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

Решение

Долг на 15-е число предыдущего месяца отличается от долга за 15-е число текущего месяца на одно и то же число на протяжении 14 месяцев – величины долгов образуют убывающую арифметическую прогрессию (потому что в конце долг стал равен нулю).

Итак, если X – величина взятого кредита, q – множитель роста кредита, a_i – величина i-го платежа, d – знаменатель прогрессии, то величины долгов можно записать в виде членов арифметической прогрессии:

$$b_1 = X, \qquad b_2 = X - d, \qquad b_3 = X - 2d, \qquad \dots, \qquad b_{15} = X - 14d = 0;$$

$$d = \frac{1}{14}X.$$

С другой стороны, можно записать величину долга после первого платежа в банковских терминах:

$$X - d = qX - a_1, \qquad a_1 = X\left(q - \frac{13}{14}\right).$$

Аналогично выразим величину второго платежа:

$$X - 2d = q^2X - qa_1 - a_2, \qquad a_2 = X - \frac{2}{14}X + q^2X - q^2X + \frac{13}{14}qX = X\left(\frac{13}{14}q - \frac{12}{14}\right).$$

$$a_3 = X\left(\frac{12}{14}q - \frac{11}{14}\right), \qquad a_4 = X\left(\frac{11}{14}q - \frac{10}{14}\right), \qquad \dots, \qquad a_{14} = X\left(\frac{1}{14}q - 0\right), \qquad a_{15} = 0.$$

Просуммируем величины всех выплат:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = X\left(\frac{\frac{1+14}{2}\cdot 14}{14}q - \frac{\frac{1+13}{2}\cdot 13}{14}\right) = X(7{,}5q - 6{,}5).$$

Согласно условию, общая сумма выплат на 15% больше суммы кредита.

$$A = 1{,}15X, \qquad 1{,}15 = 7{,}5q - 6{,}5, \qquad q = \frac{7{,}65}{7{,}5} = 1{,}02, \qquad r\% = 2\%.$$

Ответ: 2. ◄

Кто мне скажет, где ошибка в решении «по-детски»?...

***

Все эти печальные вещи натолкнули меня на мысль о том, что мне пора, хотя бы на некоторое время, завершить писание методических работ по решению задач ЕГЭ, чтобы не брать грех на душу и не вводить своих дорогих случайных читателей в заблуждение. Я уже сделал однажды нормальную такую вещь – решил все задачи Открытого банка по математике (начиная с http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/1 и заканчивая http://opengia.ru/subjects/mathematics-11/topics/6). Но, как это не удивительно, количество скачиваний этой работы ничтожно по сравнению со скачиваниями, например, решений демонстрационных вариантов!

Да что может быть тупее и проще, чем написание решений задач из демонстрационных вариантов?! Парадокс.

Еще большая досада оттого, что наименьшим числом скачиваний в Интернете обладают мои работы по математическим олимпиадам, которые я считаю наоборот самыми содержательными, полезными и написанными не напрасно.

Относительно второго издания "Невероятного чего-то там" стоит сказать следующее: как оказалось, решения экономических задач содержались в некоторых книжках Ф.Ф. Лысенко, поэтому принадлежность мне "пальмы первенства" достаточно легко опровергается.

Я хотел было дождаться выхода методических рекомендаций для экспертов 2016 года, но что-то мне подсказывает, что эти материалы не порадуют разнообразием или какой-либо неожиданной полезностью, разнообразием решений и формулировок экономической задачи.

Поэтому я спешу "издать" эту книжку с целью показать вам весь ужас и трудность экономических задач и в очередной раз напомнить, что есть математические олимпиады, задачи очных туров которых легче задач ЕГЭ или сравнимы с ними, но диплом победителя или призера математической олимпиады из федерального перечня Министерства образования и науки дает всегда больше, чем просто число баллов в сертификате.

В частности, регистрация на ОММО заканчивается 24-го января 2016 года. Поучаствовать стоит в любом случае.

Хотите больше разных формулировок экономической задачи? Открывайте «Математика – абитуриенту» В.В. Ткачука и ищите среди задач экономического факультета МГУ. В принципе, то же самое можно сказать про все остальные задачи ЕГЭ высокого уровня сложности.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ

Задача (0). «По-детски»

► 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение

Пусть $F = 9\,930\,000$ – величина кредита, x – искомая величина ежегодного платежа.

Первый год:

долг: $1{,}1F$;

платеж: x;

остаток: $1{,}1F - x$.

Второй год:

долг: $1{,}1(1{,}1F - x)$;

платеж: x;

остаток: $1{,}1(1{,}1F - x) - x$.

Третий год:

долг: $1{,}1(1{,}1(1{,}1F - x) - x)$;

платеж: x;

остаток: 0, потому что по условию было всего три платежа.

Единственное уравнение

$$1{,}1(1{,}1(1{,}1F - x) - x) - x = 0, \qquad 1{,}331F = 3{,}31x, \qquad x = 3993000.$$

Ответ: 3 993 000 рублей. ◄

Такое решение тоже годится и в этом нет никаких сомнений. Достоинство такой записи – простота и понятность, отсутствие громоздких математических конструкций.

Задача (1).

► 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод

Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решение

Надо понять простую истину – чем больше будет платеж по кредиту, тем меньше будет долг. Меньше будет долг – быстрее его выплатишь. Максимальный ежемесячный платеж, который может себе позволить этот мужик, равен 300 000 рублей согласно условию. Если Всеволод Ярославович будет платить максимальный платеж, то он быстрее всего погасит долг. Другими словами, сможет взять кредит на наименьший период времени, что и требуется условием.

Я по традиции, как слабый математик, решаю задачу «в лоб». Такое решение тоже годится!

1 июня 2013 года: долг 900 000.

Прошел месяц. 1 июля 2013 года: долг (1 + 0,01)900 000 – 300 000 = 609 000.

Прошел месяц. 1 августа 2013 года: долг (1 + 0,01)609 000 – 300 000 = 315 090.

Прошел месяц. 1 сентября 2013 года: долг (1 + 0,01)315 090 – 300 000 = 18 240,9. Умножения на самом деле не очень сложные, да и умножать приятнее, чем делить.

Прошел месяц. 1 октября 2013 года: долг (1 + 0,01)18 240,9 = 18 423,309 $<$ 300 000, кредит погашен. Итого прошло 4 месяца.

Ответ: 4 месяца. ◄

Теперь надо реабилитироваться в глазах читателей. Воспользуюсь результатами предыдущих задач с учётом следующего рассуждения: неравенство оставшейся части долга имеет вид $a_x \le 0$.

► Пусть x – искомая величина, a = 900 000 – сумма, взятая в банке, k% = 1% – ставка по кредиту, y = 300 000 – ежемесячный платеж, m = (1 + 0,01k) – ежемесячный множитель оставшегося долга. Тогда, по уже известной формуле, получим неравенство:

$$a_x = m^x a - \frac{m^x - 1}{m - 1} \cdot y \le 0; \;\; x \ge \log_m \frac{y}{y - 0{,}01ka}\;; \quad x \ge \log_{1,01} \frac{100}{97}.$$

Получили неприятное неравенство, но верное. Посчитав в уме исключительно для душевного успокоения, имею:

$$\log_{1,01} \frac{100}{97} \approx \; 3{,}06112509566 \; > 3.$$

Целую часть числа берем потому, что число платежей не может быть числом не целым. Берем ближайшее большее целое, меньшее взять не можем (потому что тогда останется долг) и видно, что полученный логарифм число не целое. Получается 4 платежа, 4 месяца.

За ответ "$\left[\log_{1,01}\frac{100}{97}\right]+1$ – искомое число месяцев, где [ ] – целая часть числа" вам обязаны поставить высший балл.

Если мы снова встретим ту же формулировку задачи, то не надо бояться получить неравенство с логарифмом. Главное, чтобы оно было без ошибок. Сначала попытаемся понять, является ли $\log_m \frac{y}{y-0{,}01ka}$ числом целым. Если нет, то ответ к задаче (абсолютно правильный) $\left[\log_m \frac{y}{y-0{,}01ka}\right]+1$. Если да, то вообще всё отлично.

Ответ: $\left[\log_{1,01}\frac{100}{97}\right]+1$. ◄

Самое удивительное, что никто не запрещает вам сначала привести вон то простое решение и получить 4 месяца, а затем привести решение в формулах, а ответ записать так $\left[\log_{1,01}\frac{100}{97}\right]+1=4$. Но это уже совсем другая история...

Задача (1). «По-взрослому»

► 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решение

Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть S – сумма (в тыс. руб.) кредита; S_n – задолженность в n – ый месяц; s_n – выплата в n – ый месяц, $s_n = s$ (величина месячной выплаты одинакова и максимальна по предположению, кроме, быть может, последней выплаты); q – коэффициент ежемесячного повышения, $q > 1$. Тогда

$$S_1 = qS - s, \qquad S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2S - (1+q)s,$$
$$S_3 = qS_2 - s = q^3S - (1+q+q^2)s, \ldots$$

После предпоследней выплаты останется $S_{N-1} \le s$ и тогда в последний, N – й раз, кредит будет погашен. Значит

$$S_{N-1} = q^{N-1}S - (1+q+q^2+\cdots+q^{N-1})s = q^{N-1}S - \frac{q^{N-1}-1}{q-1}s \le s.$$

Относительно $x = q^{N-1}$ получаем неравенство

$$(q-1)xS-(x-1)s \le (q-1)s, \qquad x\big((q-1)S-s\big) \le (q-2)s.$$

По условию $S = 900$, $s = 300$, $q = 1{,}01$. Подставляем:

$$x \cdot (-291) \le -297, \qquad x = 1{,}01^{N-1} \ge \frac{297}{291} = 1{,}0206\ \ldots.$$

Так как $1{,}01^2 = 1{,}0201 < 1{,}0206\ldots$, $1{,}01^3 = 1{,}030301 > 1{,}0206\ldots$, то $N - 1 = 3$, $N = 4$.

Ответ: 4 месяца. ◄

Задача (1). «По-детски»

► 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решение

Если бы банк не брал процентов, то долг можно было бы вернуть за 3 месяца. Банк за 3 месяца возьмет меньше, чем 3% от первоначальной суммы в 900 тыс., т.е. меньше 27 тыс. Поэтому то, что забирает банк, точно можно будет оплатить в 4–й месяц, потратив меньше 300 тыс.

Ответ: 4 месяца. ◄

Задача (2).

► 31 декабря 2013 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), а затем Андрей переводит в банк 3 460 600 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение

Действуем по накатанной. Пусть x – искомая величина, k% – процентная ставка по кредиту, y – ежегодный платеж. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга будет умножаться на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $x_1 = mx - y$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$x_2 = mx_1 - y = (mx - y)m - y = m^2x - (1+m)y.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$x_3 = mx_2 - y = m^3x - (1 + m + m^2)y = m^3x - \frac{m^3 - 1}{m - 1}y.$$

По условию Андрей выплатил долг за три года, то есть $x_3 = 0$, откуда

$$x = \frac{(m^3 - 1)y}{(m - 1)m^3}.$$

При y = 3 460 600, k% = 10% (соответственно k = 10), получаем: m = 1,1 и

$$x = \frac{0{,}331 \cdot 3\,460\,600}{0{,}1 \cdot 1{,}331} = 8\,606\,000 \text{ (рублей)}.$$

Тут стоит напомнить о надеждах и фактах. У вас всегда должна быть надежда на *хорошие* числа. Эта надежда подсказывает, что 3 460 600 делится на куб числа 11 без остатка. Факт в свою очередь заключается в том, что вы должны не лениться и всегда раскладывать делимое большое число на множители.

3 460 600 / 100 = 34 606; 34 606 / 2 = 17 303 (да, надо пробовать делить на 11, потому что m = 1,1 = 11 · 10, так потом будет легче считать); 17 303 / 11 = 1 573 (еще раз на 11, потому что там куб m); 1 573 / 11 = 143 (и еще разок); 143 / 11 = 13. Отлично, теперь всё понятно.

Ответ: 8 606 000 рублей. ◄

Задача (3).

► 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 51 000 рублей, во второй 66 600 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

Решение

Просто транш это то же самое, что и платёж/перевод денег.

Ну, тут уже совсем всё просто. Пусть x% – искомая ставка по кредиту; $m = (1 + 0{,}01x)$ – множитель оставшегося долга; a = 100 000 – сумма, взятая в банке; y_1 = 51 000, y_2 = 66 600 – размеры первого и последнего тра́ншей (не путать со словом "транше́й" – траншея (ров, окоп) во множественном числе и родительном падеже).

После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = ma - y_1$.

После второй выплаты сумма долга составит: $a_2 = ma_1 - y_2 = m^2a - my_1 - y_2$. По условию, $a_2 = 0$. Уравнение надо будет решить сначала относительно m, выбрав подходящий корень

$$100000m^2 - 51000m - 66600 = 0, \qquad 500m^2 - 255m - 333 = 0.$$

Вот где начинаются трудности.

$D = 255^2 + 4 \cdot 500 \cdot 333 = 15^2 \cdot 17^2 + 15^2 \cdot 37 \cdot 80 = 225 \cdot (289 + 2960) = 731025.$

(В принципе можно было и просто посчитать $255^2 + 4 \cdot 500 \cdot 333$, лишь бы правильно.)

Давайте запишем выражение для нахождения k для того, чтобы в случае вычислительной ошибки, всё же получить 2 балла по критериям.

$$k = 100\left(\frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4 \cdot a \cdot y_2}}{2 \cdot a} - 1\right).$$

Раскладываем на множители, мы обязаны попытаться. 731 025 / 5 = 146 205; 146 205 / 5 = 29 241; сумма цифр предыдущего числа делится на 9, значит 29 241 / 9 = 3 249; опять 3 249 / 9 = 361; ну, а $361 = 19^2$. Тогда $731\,025 = (5 \cdot 9 \cdot 19)^2 = 855^2$. Продолжаем, выписывая только подходящий корень:

$$m = \frac{255 + 855}{1\,000} = 1{,}11.$$

Тогда $x = 0{,}11$; $x\% = 11\%$.

Ответ: 11%. ◄

Задача (4). «По-детски»

► Оля хочет взять в кредит 1 000 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

Решение

По аналогии с задачей (1):

Первый год (сказано, что погашение происходит раз в год после начисления процентов): долг (1 + 0,1) 1 000 000 – 240 000 = 860 000.

Второй год: долг (1 + 0,1) 860 000 – 240 000 = 706 000.

Третий год: долг (1 + 0,1) 706 000 – 240 000 = 536 600.

Четвертый год: долг (1 + 0,1) 536 600 – 240 000 = 350 260.

Пятый год: долг (1 + 0,1) 350 260 – 240 000 = 145 286.

Шестой год: долг (1 + 0,1) 145 286 = 159 814,6 < 240 000, конец.

Ответ: 6 лет. ◄

Задача (4). «По-взрослому-1»

► Оля хочет взять в кредит 1 000 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

Решение

По аналогии с задачей (1):

$$\log_m \frac{y}{y - 0{,}01ka} = \log_{1,1} \frac{240\,000}{240\,000 - 0{,}1\ \cdot 1\,000\,000} = \log_{1,1} \frac{12}{7}.$$

Полученное число, очевидно, не целое (аргумент логарифма не является степенью с натуральным показателем основания логарифма). Поэтому берем целую часть числа и прибавляем единичку.

Ответ: $\left[\log_{1,1} \frac{12}{7}\right] + 1$, где [ ] – целая часть числа. ◄

Задача (4). «По-взрослому-2»

► Оля хочет взять в кредит 1 000 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

Решение

Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть S – сумма (в тыс. руб.) кредита; S_n – задолженность в n – ый год; s_n – выплата в n – ый год, $s_n = s$ (величина годовой выплаты одинакова и максимальна по предположению, кроме, быть может, последней выплаты); q – коэффициент ежегодного повышения, $q > 1$. Тогда

$$S_1 = qS - s, \qquad S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2S - (1 + q)s,$$
$$S_3 = qS_2 - s = q^3S - (1 + q + q^2)s, \ldots$$

После предпоследней выплаты останется $S_{N-1} \le s$ и тогда в последний, N – й раз, кредит будет погашен. Значит

$$S_{N-1} = q^{N-1}S - (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1})s = q^{N-1}S - \frac{q^{N-1} - 1}{q - 1} \le s.$$

Относительно $x = q^{N-1}$ получаем неравенство

$$(q - 1)xS - (x - 1)s \le (q - 1)s, \qquad x\big((q - 1)S - s\big) \le (q - 2)s.$$

По условию $S = 1000$, $s = 240$, $q = 1{,}1$. Подставляем:

$$x \cdot (-140) \le -216, \qquad x = 1{,}1^{N-1} \ge \frac{216}{140} = 1{,}54 \ldots.$$

Так как $1{,}1^2 = 1{,}21 < 1{,}54\ldots$, $1{,}1^3 = 1{,}331 < 1{,}54\ldots$, $1{,}1^4 = 1{,}4641 < 1{,}54\ldots$, $1{,}1^5 = 1{,}61051 > 1{,}54\ldots$, то $N - 1 = 5$, $N = 6$.

Ответ: 6 лет. ◄

Как это неудивительно, но среди трех представленных решений наиболее привлекательным для меня видится решение «по-детски». Решение «по-взрослому-1» математически обосновано и верное, но оно не дает ответа в виде целого числа. Строго говоря выражение «$\left[\log_{1,1}\frac{12}{7}\right]+1$, где [ ] – целая часть числа» неуверенно тянет на ответ на вопрос о минимальном количестве лет. Зато в этом решении отчетливо написано выражение для нахождения ответа, в точности по критериям проверки. Решение «по-взрослому-2» тоже математически правильное, но в нем содержится крайне неприятное деление трехзначных чисел столбиком, а потом еще пять умножений...

Давайте договоримся так: тем, кому на момент ЕГЭ по математике не исполнилось 18 лет, разрешается применять метод «по-детски». Все остальные также решают задачу 17 уверенно, получают бесспорный ответ, но в бланк всё-таки записывают решение «по-взрослому».

Задача (5).

► 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 8 599 000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Сергей переводит *X* рублей. Какой должна быть сумма *X*, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами?

Решение

Одно нам известно доподлинно – Сергей не является отцом Всеволода Ярославовича.

Аналогично задаче (0).

$$X=\frac{am^3(m-1)}{m^3-1}=\frac{8\,599\,000\ \cdot 1{,}481544\ \cdot 0{,}14}{0{,}481544}=3\,703\,860.$$

Ответ: 3 703 860 рублей. ◄

Задача (6). Очень «по-взрослому»

► 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 2 788 425 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 991 625, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

Решение

Из задачи (2):

$$\frac{(m^4-1)y_1}{(m-1)m^4}=\frac{(m^2-1)y_2}{(m-1)m^2};\ \ (m^2+1)y_1=m^2y_2\,.$$

Искомая процентная ставка по кредиту:

$$k=100\left(\sqrt{\frac{y_1}{y_2-y_1}}-1\right)=12{,}5.$$

Ответ: 12,5%. ◄

Если кому-то кажется, что приведенные задачи были трудными, то спешу вас огорчить: трудные задачи только-только начинаются.

Задача (7). «По-детски ошибочное»

► Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 \le t \le 55$. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение

По условию задачи, объем поступающей на серверы информации запишется так:

$$t^2+t^2=3364,\qquad t=\sqrt{1682}.$$

Объем выходящей информации и ответ на вопрос задачи:

$$20t+21t=41t=41\sqrt{1682}.$$

Ответ: $41\sqrt{1682}$ Гбайт. ◄

Да, все понимают, что тут что-то не так. Надо написать здесь какие-то максимально простые соображения, которые помогут ситуацию прояснить. Нам не хватает лишь одного качественного исправления.

Серверы разные, второй работает *лучше*, он выдает больше обработанной информации, чем первый сервер при прочих равных условиях. Логично и естественно полагать, что первичной информацией второй сервер надо бы загружать *побольше*.

В энергетике трансформаторы разной мощности могут работать параллельно при определенных условиях, при этом трансформатор *помощнее* будет и загружаться *побольше*.

Ток в ветвях параллельно соединенных резисторов с сопротивлениями $R_1 < R_2$ идет не одинаковый.

Если я вас окончательно запутал, то коротко: первичная информация на серверы поступает не в равных количествах!

Уловка составителей ЕГЭ, сотрудников Госдепа США, оппозиционеров, РПЦ, тамплиеров и евреев не удалась, хотя они старательно употребляли в условии задачи кругом одну и ту же букву t как бы на что-то намекая.

Задача (7). «Математический анализ»

► Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 \le t \le 55$. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации.

Выразим y через x:

$$y = \sqrt{3364 - x^2}.$$

Теперь задача состоит в нахождении наибольшего значения функции

$$f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}$$

на отрезке [25; 55].

Находим производную:

$$f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}.$$

Приравниваем производную к нулю и ищем стационарные точки

$$f'(x) = 0, \qquad 20 = \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}, \qquad 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2}, \qquad x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600,$$

$$x = 40.$$

Надо узнать знак $f'(x)$ слева от 40 и справа от 40 чтобы понять, что это за точка. Условие задачи не позволяет нам использовать $x = 0$ и 50 (чтобы легче было считать), зато ОДЗ позволяет.

$$f'(0) = 20 > 0, \qquad f'(50) = 20 - \frac{1050}{\sqrt{864}}$$

$$20 \vee \frac{1050}{\sqrt{864}}, \qquad \sqrt{864} \vee 52{,}5, \qquad 864 < 2500 = 50^2 < 52{,}5^2, \qquad 20 < \frac{1050}{\sqrt{864}}, \qquad f'(50) < 0$$

Таким образом, $x = 40$ – точка максимума нашей функции f. Тогда незамедлительно

$$f(40) = 800 + 21\sqrt{3364 - 1600} = 800 + 21\sqrt{1764} = 800 + 21 \cdot 42 = 1682.$$

Причем и $x = 40$, и $y = 42$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 1682 Гбайт. ◄

И действительно, второй сервер оказался загружен больше.

Задача (7). «По-взрослому»

► Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 \le t \le 55$. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Требуется найти максимум суммы $20x + 21y$ при условиях

$$x^2 + y^2 = 3364, \qquad 25 \le x, y \le 55.$$

Заметим, что $3364 = 58^2$. Используя основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

можем записать следующее:

$$x = 58\cos\alpha, \qquad y = 58\sin\alpha, \qquad \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Для выражения обработанной информации воспользуемся методом вспомогательного угла.

$$20x + 21y = 58(20\cos\alpha + 21\sin\alpha) =$$

$$= 58 \cdot \sqrt{20^2 + 21^2}\left(\frac{20}{\sqrt{20^2 + 21^2}}\cos\alpha + \frac{21}{\sqrt{20^2 + 21^2}}\sin\alpha\right) = 58 \cdot 29\sin(\alpha + \varphi),$$

$$\sin\varphi = \frac{20}{29}, \qquad \cos\varphi = \frac{21}{29}.$$

Для функции

$$f = 1682 \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

наибольшее значение достигается при наибольшем значении функции

$$g = \sin(\alpha + \varphi), \qquad g_{\text{наиб.}} = 1.$$

Очевидно, $f_{\text{наиб.}} = 1682$.

Возвращаясь к переменным x и y, проверим их принадлежность отрезку [25;55].

$$\sin(\alpha + \varphi) = 1, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad \cos\alpha = \sin\varphi = \frac{20}{29}, \qquad \sin\alpha = \cos\varphi = \frac{21}{29}.$$

Тогда

$$x = 58 \cdot \frac{20}{29} = 40, \qquad y = 58 \cdot \frac{21}{29} = 42, \qquad 25 \le x, y \le 55.$$

Ответ: 1682. ◄

Задача (8).

► 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение

Пусть 15-го числа текущего месяца долг равен x, а 15-го числа предыдущего месяца долг равен y. Тогда в конце предыдущего месяца, после увеличения на 5%, долг равен $1{,}05y$, значит выплата в первой половине текущего месяца составит $1{,}05y - x$.

В процентах от суммы кредита выплаты в феврале составили $1{,}05 \cdot 100 - 90 = 15\%$, в марте составили $1{,}05 \cdot 90 - 80 = 14{,}5\%$, в апреле – 14%, в мае – 13,5%, наконец в июле $1{,}05 \cdot 50 = 52{,}5\%$ соответственно.

Следовательно, общая сумма выплат составила $15 + 14{,}5 + 14 + 13{,}5 + 13 + 52{,}5 = 122{,}5\%$. Таким образом, переплата равна $122{,}5 - 100 = 22{,}5\%$.

Ответ: 22,5%. ◄

Задача (9). «Комбинировано»

► В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Решение

Пусть S – сумма взятого кредита; q – коэффициент ежегодного повышения; x – ежегодный платеж.

Июль нулевого года: долг S.

Январь первого года: долг qS.

Февраль–июнь первого года: долг $qS - a$ (первый платеж).

Январь второго года: долг $q^2S - qa$.

Февраль–июнь второго года: долг $q^2S - (q + 1)a$ (второй платеж).

(Прошел год)

Февраль–июнь четвертого года: долг $q^4S - a \cdot (q^4 - 1) / (q - 1) = 0$ (четвертый платеж).

$$a = \frac{q^4 S(q-1)}{q^4 - 1} = \frac{2{,}0736 \cdot 8052000 \cdot 0{,}2}{1{,}0736} = 3110400.$$

Ответ: 3110400 рублей. ◄

Подсказка начинать считать июль взятия кредита месяцем нулевого года кроется в условии задачи: «кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами». Попробуйте считать июль взятия кредита месяцем первого года и у вас получится, что в феврале–июне четвертого года вы выплатили весь долг, но платежей в сумме совершили только три!

Задача (10).

► Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15\,000 - P$; $1\,000 \le P \le 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3\,000Q + 5\,000\,000$ рублей.

Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство.

Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение

Пусть p – цена товара в тыс. руб. за шт., q – объем купленного у фирмы товара в тыс. шт. Выразим p через q:

$$p = 15 - q, \qquad 1 \le p \le 15.$$

Теперь функцию разности дохода от продажи товара и затрат на его изготовление можно записать следующим образом:

$$y = q(15 - q) - (3q + 5000) = -q^2 + 12q - 5000.$$

Нетрудно показать, что максимум функции y достигается при $q = 6$. Значит, максимальная прибыль фирмы достигается при количестве товара $q_{\max} = 6$ и цене $p_{\max} = 9$ соответственно.

Пусть p_1 – начальная цена товара, тогда $p_1 = 15 - q_1$. Функция прибыли при начальной цене:

$$f = -q_1^2 + 12q_1 - 5000.$$

Пусть p_2 – цена товара после снижения на 20%, тогда $p_2 = 0{,}8p_1 = 12 - 0{,}8q_1$ и $q_2 = 15 - 0{,}8p_1 = 3 + 0{,}8q_1$. Функция прибыли при цене после снижения:

$$h = -(3 + 0{,}8q_1)^2 + 12(3 + 0{,}8q_1) - 5000.$$

По условию задачи, $f = h$. Получим уравнение:

$$-q_1^2 + 12q_1 - 5000 = -(3 + 0{,}8q_1)^2 + 12(3 + 0{,}8q_1) - 5000,$$

$$0{,}36q_1^2 - 7{,}2q_1 + 27 = 0, \qquad q_1^2 - 20q_1 + 75 = 0, \qquad q_{11} = 5, \qquad q_{12} = 15.$$

Второе значение для q_1 не подходит, поскольку цена товара становится равной 0, что противоречит ограничению $1 \le p \le 15$.

Получается, что $p_1 = 10$, $p_2 = 8$. Возвращаясь к тому, что максимальная прибыль достигается при цене, равной 9, ответ на вопрос задачи запишется следующим образом:

$$\frac{p_{max} - p_2}{p_2} \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12{,}5\%.$$

Ответ: 12,5%. ◄

Да-да, вы заметили, что прибыли как таковой нет, $y\,(q_{\max}) < 0$! Но в экономике такое возможно. Если быть точным, то условие могло содержать «...однако размер убытков не изменился...» и «...чтобы добиться наименьших убытков...». Однако даже без этого, задача сформулирована и решена правильно.

Переход к маленьким буквам был только для того, чтобы не писать тройки нулей.

Выражать всё через q совершенно не обязательно. Можно было выразить всё через p.

Задача (11).

► Строительство нового завода стоит 78 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$.

Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение

Условие окупаемости строительства завода не более чем за 3 года запишется следующим образом:

$$3\big(px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)\big) \geq 78, \qquad p \geq 0{,}5x + 2 + \frac{32}{x}.$$

Находим минимальное значение p:

$$p' = 0{,}5 - \frac{32}{x^2}, \qquad p' = 0, \qquad 0 = 0{,}5 - \frac{32}{x^2}, \qquad x = \pm 8.$$

При $x = -10000$ имеем $p' > 0$; при $x = 0{,}5$ имеем $p' = -127{,}5 < 0$; при $x = 10000$ имеем $p' > 0$. Таким образом, производная p' меняет свой знак с – на + в точке $x = 8$ – в точке минимума.

Значит условию задачи удовлетворяют значения $p \geq 10$, среди которых наименьшее равно 10.

Ответ: 10. ◄

Задача (13).

► Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту же неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту же неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение

Суммарно часов работы на заводах будет 5 000 000 / 500 = 10 000. Пусть x^2 – количество часов работы на первом заводе, y^2 – то же на втором. Тогда требуется найти максимальное значение выражения

$$f = 3x + 4y, \qquad x^2 + y^2 = 10000.$$

Выразив y через x, получим:

$$f = 3x + 4\sqrt{1000 - x^2}, \qquad f' = 3 - \frac{4x}{\sqrt{1000 - x^2}};$$

$$f' = 0, \qquad \frac{4x}{\sqrt{1000 - x^2}} = 9, \qquad x = 60.$$

Единственная стационарная точка $x = 60$ является точкой максимума, поскольку $f'(-99) > 0$, а $f'(99) < 0$. Окончательно

$$f(60) = 3 \cdot 60 + 4 \cdot \sqrt{10000 - 3600} = 180 + 320 = 500.$$

Ответ: 500. ◄

Задача (14). По мотивам задачи 12.

► В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн. рублей?

Решение

Долг в июле предыдущего года отличается на одно и то же число от долга в июле текущего года на протяжении N лет – величины долгов образуют убывающую арифметическую прогрессию (потому что в конце долг стал равен нулю).

Итак, если X – величина взятого кредита, q – множитель роста кредита, a_i – величина i-го платежа, d – знаменатель прогрессии, то величины долгов можно записать в виде членов арифметической прогрессии:

$$b_1 = X, \qquad b_2 = X - d, \qquad b_3 = X - 2d, \qquad \dots, \qquad b_{N+1} = X - Nd = 0;$$

$$d = \frac{1}{N}X.$$

С другой стороны, можно записать величину долга после первого платежа в банковских терминах:

$$X - d = qX - a_1, \qquad a_1 = X\left(q - \frac{N-1}{N}\right).$$

Аналогично выразим величину второго платежа:

$$X - 2d = q^2X - qa_1 - a_2, \qquad a_2 = X - \frac{2}{N}X + q^2X - q^2X + \frac{N-1}{N}qX = X\left(\frac{N-1}{N}q - \frac{N-2}{N}\right).$$

$$a_3 = X\left(\frac{N-2}{N}q - \frac{N-3}{N}\right), \qquad a_4 = X\left(\frac{N-3}{N}q - \frac{N-4}{N}\right), \qquad \dots, \qquad a_N = X\left(\frac{1}{N}q - 0\right),$$

$$a_{N+1} = 0.$$

Просуммируем величины всех выплат:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_N = X\left(\frac{\frac{1+N}{2}\cdot N}{N}q - \frac{\frac{1+(N-1)}{2}\cdot(N-1)}{N}\right),$$

$$A = X(0{,}5q + 0{,}5qN - 0{,}5N + 0{,}5), \qquad N = \frac{\frac{2A}{X} - q - 1}{q-1} = 7.$$

Ответ: 7. ◄

Задача (15).

► Виктор Михайлович положил в банк 96 000 рублей. Несколько лет ему начислялись то 5%, то 10% годовых, а за последний год начислили 25% годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате вклад стал равным 160 083 рубля. Сколько лет пролежал вклад в банке?

Решение

Пусть вклад лежал a лет под 5% годовых и b лет пот 10% годовых. Тогда, после $a + b$ лет сумма вклада составит $(1 + 0{,}05)^a \cdot (1 + 0{,}1)^b \cdot 96\,000$. После последнего года вклад достигнет суммы, равной $1{,}25 \cdot 1{,}05^a \cdot 1{,}1^b \cdot 96\,000 = 120\,000 \cdot 1{,}05^a \cdot 1{,}1^b$.

По условию, по прошествии всех лет, вклад стал равным 160 083 рубля:

$$120000 \cdot 1{,}05^a \cdot 1{,}1^b = 160083, \qquad 1{,}05^a \cdot 1{,}1^b = 1{,}334025.$$

Попытаемся преобразовать последнее равенство:

$$\left(\frac{105}{100}\right)^a \cdot \left(\frac{110}{100}\right)^b = 1{,}334025, \qquad 105^a \cdot (11\cdot 10)^b = 1{,}334025 \cdot 100^{a+b},$$

$$105^a \cdot 11^b = 1{,}334025 \cdot 10^{2a+b}.$$

Натуральная степень числа, оканчивающегося на 5, также оканчивается на 5, равно как и натуральная степень числа, оканчивающегося на 1, оканчивается на 1.

В этой связи получается, что последняя цифра числа $105^a \cdot 11^b$ есть 5. Из последнего равенства для целых a и b следует, что $2a + b = 6$, чтобы получился единственный возможный случай

$$105^a \cdot 11^b = 1334025.$$

Остается представить число 1334025 в виде произведения простых чисел:

$$1334025 = 5^2 \cdot \dots$$

Уже этого достаточно для того, чтобы записать $a = 2$, поскольку среди чисел 105 и 11 только 105 содержит 5 в качестве множителя, $105 = 5 \cdot 21$, откуда $b = 6 - 4 = 2$.

Окончательно, вклад находился в банке $2 + 2 + 1 = 5$ лет.

Ответ: 5. ◄

Следующая задача может показаться трудной, но на самом деле она хороша тем, что не задает лишних вопросов.

Задача (16).

► В первом отделении банка 45% от общего числа клиентов составляют бюджетные организации и 55% частные клиенты; во втором отделении 10% составляют корпоративные клиенты, 40% бюджетные организации и 50% частные клиенты; в третьем отделении 30% корпоративные клиенты, 70% – частные клиенты.

После объединения трех отделений корпоративные клиенты составляют 15%. Найдите промежуток, в пределах которого может находиться процент частных клиентов.

Решение

Пусть x, y, z – количества клиентов в первом, втором и третьем отделениях соответственно.

Тогда число корпоративных клиентов после объединения запишется так:

$$0{,}1y + 0{,}3z = 0{,}15(x + y + z), \qquad z = \frac{y + 3x}{3}.$$

(Теперь ничего не остается, кроме как записать выражение для доли частных клиентов и что-то с этим делать.)

Теперь запишем выражение для доли частных клиентов от общего числа клиентов банка после объединения:

$$A = \frac{0{,}55x + 0{,}5y + 0{,}7 \cdot \frac{y + 3x}{3}}{x + y + \frac{y + 3x}{3}} = \frac{3{,}75x + 2{,}2y}{6x + 4y}.$$

Разделим и числитель, и знаменатель последней дроби на $x \neq 0$:

$$A = \frac{3{,}75 + 2{,}2\frac{y}{x}}{6 + 4\frac{y}{x}}.$$

Никаких дополнительных ограничений, кроме положительности, для количеств клиентов первого и второго отделений, очевидно, нет. Поэтому:

$$0 < \frac{y}{x} = t < \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{3{,}75 + 2{,}2t}{6 + 4t}.$$

Нетрудно понять, что при $t = 0$ её значение равно 3,75 / 6 = 0,625. Для рассмотрения другого граничного значения t, представим нашу функцию в другом виде (поделив числитель и знаменатель на t):

$$f(t) = \frac{\frac{3{,}75}{t} + 2{,}2}{\frac{6}{t} + 4}.$$

Видно, что при стремлении t к ∞ первые слагаемые числителя и знаменателя обратятся в ноль и значение нашей функции станет равным 2,2 / 4 = 0,55. Окончательно

$$0{,}55 < A < 0{,}625, \qquad 55\% < A\% < 62{,}5\%.$$

Неравенства строгие, потому что граничные значения t недопустимы.

Ответ: (55%; 62,5%).

Задача (17).

► Два индивидуальных предпринимателя занимались изготовлением зеркал.

В течение ряда лет первый предприниматель изготавливал одно и то же (но не более 210) количество зеркал за каждый год. Второй предприниматель в этот период изготавливал за каждый год 90% от того количества зеркал, которое изготавливал первый предприниматель.

После обновления оборудования второй предприниматель стал изготавливать за каждый год на 80% больше, чем он изготавливал до этого обновления, и более, чем 244 зеркала.

Найдите количество зеркал, выпускаемое вторым предпринимателем за каждый год после обновления оборудования. Каждый предприниматель за год изготавливает целое число зеркал.

Решение

Пусть X – количество зеркал, изготовляемых первым предпринимателем за год, Y – то же для второго предпринимателя после обновления. Запишем условия задачи:

$$X \le 210, \qquad 244 < 1{,}8 \cdot 0{,}9X = Y \le 340{,}2$$

Неравенство можно уточнить:

$$244 < 1{,}62X = Y \le 340.$$

Поскольку X и Y – целые, то найдется число p такое, что $1{,}62 \cdot 100p$ – целое число.

$$\frac{244}{162} = 1\frac{41}{81} < p \le \frac{340}{162} = 2\frac{8}{81}.$$

В полученном интервале есть только одно целое число, $p = 2$. Тогда $1{,}62 \cdot 200 = 324$.

Ответ: 324. ◄

Задача (18).

► В продовольственном ларьке за одну неделю продали 46 килограммовых пачек пельменей категорий А, Б и В.

При этом пельменей категории А продано меньше, чем пельменей категории В, а пельменей категории Б продано в 10 раз больше, чем пельменей категории В.

Сколько пачек пельменей категории А было продано за указанную неделю?

Решение

Условие задачи запишется в виде системы:

$$\begin{cases} \text{А} + \text{Б} + \text{В} = 46, \\ \text{А} < \text{В}, \\ \text{А}, \text{Б}, \text{В} \geq 0, \\ \text{Б} = 10\text{В}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{А} = 46 - 11\text{В}, \\ 0 \leq \text{В} \leq 4. \end{cases}$$

Несложный перебор дает единственный приемлемый результат, А = 2 при В = 4, где А и В – количества килограммовых пачек пельменей категорий А и В соответственно, проданных за указанную неделю.

Ответ: 2. ◄

Задача (19).

► Банк планирует на один год вложить 20% имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные 80% – в проект B. В зависимости от обстоятельств, проект A может принести прибыль в размере от 27% до 32% годовых, а проект B – от 37% до 42% годовых.

В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться от 15% до 20% годовых.

Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты A и B может при этом получить банк.

Решение

Пусть X – средства клиентов банка до вложения в проекты. Рассмотрим случай минимальной прибыли от вложений в оба проекта и одновременно максимальных выплат клиентам.

Минимальный доход от вложения в проект A: $0{,}2X \cdot 1{,}27 = 0{,}254X$.

Минимальный доход от вложения в проект B: $0{,}8X \cdot 1{,}37 = 1{,}096X$.

Суммарная прибыль от вложений в проекты: $0{,}254X + 1{,}096X = 1{,}35X$.

Максимальная выплата клиентам банка: $0{,}2X$. (Здесь именно от изначальной суммы, потому что клиенты не могут претендовать на заработанные банком деньги.)

Чистая прибыль банка в худшем случае: $1{,}35X - 0{,}2X = 1{,}15X$.

Рассмотрим случай максимальной прибыли от вложений в оба проекта и одновременно минимальных выплат клиентам.

Максимальный доход от вложения в проект A: $0{,}2X \cdot 1{,}32 = 0{,}264X$.

Максимальный доход от вложения в проект B: $0{,}8X \cdot 1{,}42 = 1{,}136X$.

Суммарная прибыль от вложений в проекты: $0{,}264X + 1{,}136X = 1{,}4X$.

Чистая прибыль банка в лучшем случае: $1{,}4X - 0{,}15X = 1{,}25X$.

Таким образом, чистая прибыль банка в процентах годовых от начальной суммы может меняться от 15% до 25%.

Ответ: 15% и 25%. ◄

Задача (20).

► Алексей Леонидович имеет годовой валютный вклад под ставку d% годовых. Если вклад с причитающимися процентами не будет востребован на дату окончания, договор считается пролонгированным (продленным) еще на один год.

Годичная ставка по рублевому депозиту (вкладу) составляет r%, курс доллара на дату начала возможной пролонгации – K_0, а прогнозируемый курс на дату её окончания – K_1. За перевод валютного вклада в рублевый банк взимает комиссионные (в рублях) в размере a% переводимой суммы.

а) Исходя из данных, получите условие целесообразности перевода (на дату возможной пролонгации) валютного вклада S на годовой рублевый депозит.

б) Определите, что выгоднее – продлить валютный вклад или переложить деньги на рублевый вклад, при условии, что $K_0 = 63$, $K_1 = 64$, $d = 9$, $r = 12$, $a = 0{,}7$.

Решение

Представим, что Алексей Леонидович пролонгировал договор без конвертации. Тогда, по прошествии двух лет, его вклад (в рублях) достигнет величины

$$(1 + d\%)^2 SK_1.$$

Представим, что вкладчик решил перевести деньги в рубли после первого года. После уплаты комиссии размер уже рублевого вклада на момент пролонгации:

$$(1 + d\%)SK_0 - a\%(1 + d\%)SK_0 = (1 + d\%)(1 - a\%)SK_0.$$

Окончательная сумма после второго года:

$$(1 + r\%)(1 + d\%)(1 - a\%)SK_0.$$

Для ответа на первый вопрос задачи сравним полученные выражения:

$$(1 + d\%)^2 SK_1 \vee (1 + r\%)(1 + d\%)(1 - a\%)SK_0,$$

$$(1 + d\%)K_1 \vee (1 + r\%)(1 - a\%)K_0.$$

Таким образом, целесообразность перевода (на дату возможной пролонгации) будет иметь место в том случае, если будет верным неравенство:

$$(1 + d\%)K_1 < (1 + r\%)(1 - a\%)K_0.$$

Для ответа на второй вопрос задачи, подставим в неравенство числовые значения:

$$(1 + 0{,}09)64 \vee (1 + 0{,}12)(1 - 0{,}007)63,$$

$$69{,}76 < 70{,}06608.$$

Ответ: а) $(1 + d\%)K_1 < (1 + r\%)(1 - a\%)K_0$; б) выгоднее переложить деньги на рублевый вклад. ◄

Задача (21). «По-детски», но не без серьезности.

► На поверхности компьютерной мышки в интернет-кафе живет колония из 30 000 бактерий, которые размножаются простым делением, то есть каждый час их число удваивается. Для борьбы с бактериями производится ежечасная дезинфекция, во время которой погибает ровно n бактерий. Число бактерий удваивается непосредственно перед дезинфекцией. Найдите n, если известно, что все бактерии на мышке уничтожены за четыре дезинфекции.

Решение

(С бактериями не шутят, поэтому распишем подробно.)

Пусть K = 30 000 – изначальное количество бактерий.

Количество бактерий перед первой дезинфекцией: $2K$, потому что по условию количество бактерий удваивается перед дезинфекцией.

Количество бактерий после первой дезинфекции: $2K – n$.

Количество бактерий перед второй дезинфекцией: $4K – 2n$.

Количество бактерий после второй дезинфекции: $4K – 2n – n = 4K – 3n$.

Количество бактерий перед третьей дезинфекцией: $8K – 6n$.

Количество бактерий после третьей дезинфекции: $8K – 6n – n = 8K – 7n$.

Количество бактерий перед четвертой дезинфекцией: $16K – 14n$.

Наконец, количество бактерий после последней дезинфекции: $16K – 15n = 0$.

Окончательно

$$n = \frac{16K}{15} = 32000.$$

Ответ: 32 000. ◄

Задача (22).

► В магазин привезли учебные пособия для школьников по трем предметам: русский язык, математика, обществознание, – в соотношении 9 : 8 : 7 соответственно. За неделю продали 60% завезенных пособий, а количество оставшихся оказалось распределено в соотношении 3 : 1 : 2 между теми же предметами (в том же порядке). Сколько процентов учебных пособий по математике было продано?

Решение

Пусть k – коэффициент пропорциональности. Тогда всего учебных пособий привезли $24k$, из которых $8k$ – по математике.

После продажи останется $0{,}4 \cdot 24k = 9{,}6k$.

Если ввести новый коэффициент пропорциональности r для ситуации после продажи, то всего учебных пособий осталось $6r$, среди которых r пособий по математике.

Имеет место равенство $9{,}6k = 6r$, $r = 1{,}6k$. Ответ на вопрос задачи найдется:

$$\frac{8k - 1{,}6k}{8k} \cdot 100\% = 80\%.$$

Ответ: 80%. ◄

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джендубаев, Э.А.-З.** / Невероятное методическое пособие по математике для решения задачи 19 профильного ЕГЭ-2015 / Открытый доступ: http://4ege.ru/matematika/6235-reshenie-zadaniy-19-po-matematike-profilnyy-uroven.html

2. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год: учебно-методическое пособие / Под редакцией **Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова**. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015.