A1 Вычислите: $25^{\frac{3}{2}} - 0{,}25$.

1) 37,25 2) 14,75 3) 124,75 4) 26,25

Решение: $25^{\frac{3}{2}} - 0{,}25 = (5^2)^{\frac{3}{2}} - 0{,}25 = 5^3 - 0{,}25 = 124{,}75$.
Верный ответ 3).

A2 Упростите выражение $3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6$.

1) 1 2) -5 3) 3 4) -3

Решение:
$3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6 = 3(\cos^2 x + \sin^2 x) - 6 = 3 - 6 = -3.$
Верный ответ 4).

A3 Упростите выражение $\sqrt[4]{625m^8}$.

1) $25m^2$ 2) $5m^2$ 3) $-25m^2$ 4) $-5m^2$

Решение: $\sqrt[4]{625m^8} = ((5^4 \cdot m^8)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\cdot\frac{1}{4}} \cdot m^{8\cdot\frac{1}{4}} = 5m^2$.
Верный ответ 2).

A4 Найдите значение выражения $0{,}3^{\log_{0,3} 2} - 5$.

1) $-4{,}91$ 2) $-4{,}7$ 3) -4 4) -3

Решение: $0{,}3^{\log_{0,3} 2} - 5 = 2 - 5 = -3$. (Применяем формулу $a^{\log_a b} = b (a > 0, a \neq 1, b > 0)$.)
Верный ответ 4).

A5 Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $7^{5x+6} = 49$.

1) $[-4; -1)$ 2) $[-1; 0]$ 3) $(0; 2)$ 4) $[5; 9]$

Решение: $7^{5x+6} = 49 \Rightarrow 7^{5x+6} = 7^2 \Rightarrow 5x + 6 = 2 \Rightarrow x = -0{,}8$.
$-0{,}8 \in [-1;0]$.
Верный ответ 2).

A6 Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_2(x+8) = \log_2 3 + \log_2 5$?

1) $(-8; -5]$ 2) $(-1; 3)$ 3) $(3; 5)$ 4) $[5; 8]$

ЯГУОВ.РФ

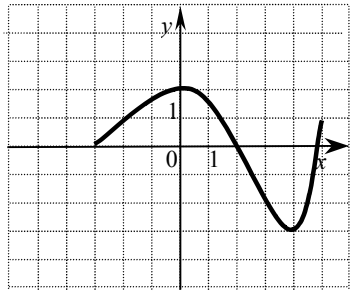
Решение:

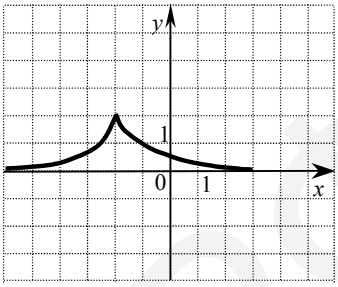
$\log_2(x+8) = \log_2 3 + \log_2 5 \Rightarrow \log_2(x+8) = \log_2 15 \Rightarrow x+8 = 15 \Rightarrow x = 7.$

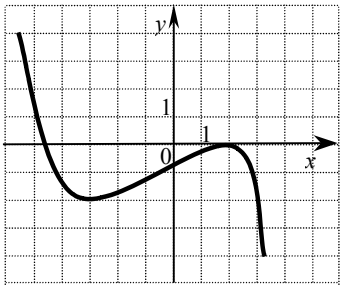
$7 \in [5;8]$.

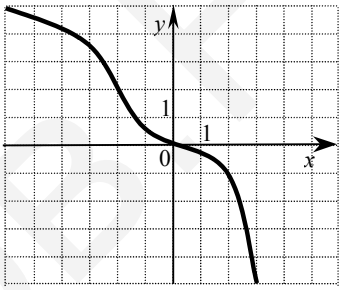
Верный ответ 4).

A7 Укажите график функции, возрастающей на отрезке [–3; 2].

1) 

2) 

3) 

4) 

Возрастающая функция – если большему x из области определения функции соответствует большее значение f(x). Такая функция на графике 3).

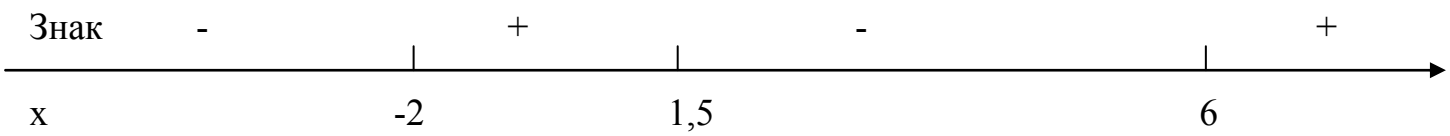
Верный ответ 3).

A8 Укажите множество решений неравенства $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{x-6} \le 0$.

1) $(-\infty; -2] \cup [1{,}5; 6)$ 2) $(-\infty; -1{,}5] \cup [2; 6)$

3) $(-\infty; -2] \cup [3; 6)$ 4) $[-2;\ 1{,}5] \cup (6; +\infty)$

Решим методом интервалов. Отметим на числовой прямой значения x при котором множители выражения обращаются в ноль. Это числа: 1,5; -2; 6.



Возьмѐм значение 0 из промежутка от -2 до 1,5 и подставим в выражение

Получим $\frac{(2\cdot 0-3)(0+2)}{0-6}=+1$. Значит в соседних промежутках минусы и т.д. и x ≠ 6, что бы в знаменателе не было бы нуля, и нам нужен промежуток с минусом.
x ∈ (-∞; -2] ∪ [1,5; 6).
Верный ответ 1).

A9 Вычислите значение производной функции $y = \sin x - 2x$ в точке $x_0 = 0$.

1) 1 2) 0 3) –3 4) –1

Решение: y' = (sinx – 2x)' =cosx – 2. y'(0) = cos0 – 2 = 1 – 2 = -1.
Верный ответ 4).

A10 Найдите область определения функции $y = \sqrt[6]{1-\log_{0,7} x}$.

1) [0,7; +∞) 2) (0; 0,7] 3) (–∞; 0,7] 4) (0,7; +∞)

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным и логарифм существует только для положительных чисел.
Значит $\begin{cases}1-\log_{0,7} x \ge 0,\\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_{0,7} x \le 1,\\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \ge 0,7,\\ x>0\end{cases} \Rightarrow x \ge 0,7.$
Верный ответ 1).

A11 Найдите множество значений функции $y = 6^x - 12$.

1) (0; +∞) 2) (–12; +∞) 3) [–12; +∞) 4) (–∞; – 12)

$0< 6^x <+\infty$ => $0 - 12 < 6^x - 12 < +\infty$ => $-12 < 6^x - 12 < +\infty$. Значит y∈ (-12; +∞).
Верный ответ 2).

A12 Решите уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

1) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

3) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

ЯГУ.ОВ.РФ

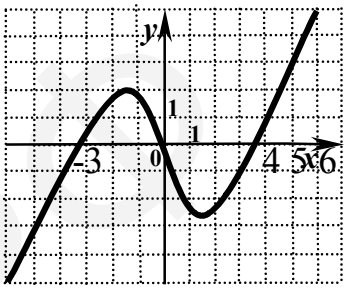
Решение: $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n.$

Верный ответ 2).

A13 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какому из следующих промежутков принадлежит корень уравнения $f(x) = 4$?

1) (– 6; –4) 2) (5; 7)

3) (– 2; 0) 4) (0; 2)



Функция f(x) = 4, при значениях x от 5 до 6.
Верный ответ 2).

A14 Через точку графика функции $y = e^x - x^2$ с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

1) e – 2 2) – 1 3) e – 1 4) – 2

Решение: Тангенс угла наклона касательной к графику функции равен значению производной в точке $x_0 = 1$. Найдѐм производную функции $y' = (e^x - 2x)' = e^x - 2x$.
$y'(1) = e - 2$.
Верный ответ 1).

ЧАСТЬ 2

Ответом на каждое задание этой части должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера задания (B1 – B9), начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке строго по образцу из верхней части бланка. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Найдите значение выражения $\cos 15^\circ(\cos 50^\circ \sin 65^\circ - \cos 65^\circ \sin 50^\circ)$.

$$\cos 15^\circ(\cos 50^\circ \sin 65^\circ - \cos 65^\circ \sin 50^\circ) = \cos 15^\circ \sin(65^\circ - 50^\circ) = \frac{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} : 2 = 0{,}25.$$

Записать ответ : 0,25.

B2 Найдите сумму корней уравнения $(3^{2x^2-29}-27)\sqrt[4]{5x+18}=0.$

$$(3^{2\delta^2-29}-27)\sqrt[4]{5x+18}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}\sqrt[4]{5x+18}=0,\\3^{2x^2-29}-3^3=0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5x+18=0,\\2x^2-29-3=0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1=-3{,}6,\\x_2=4, x_3=-4.\end{bmatrix}$$

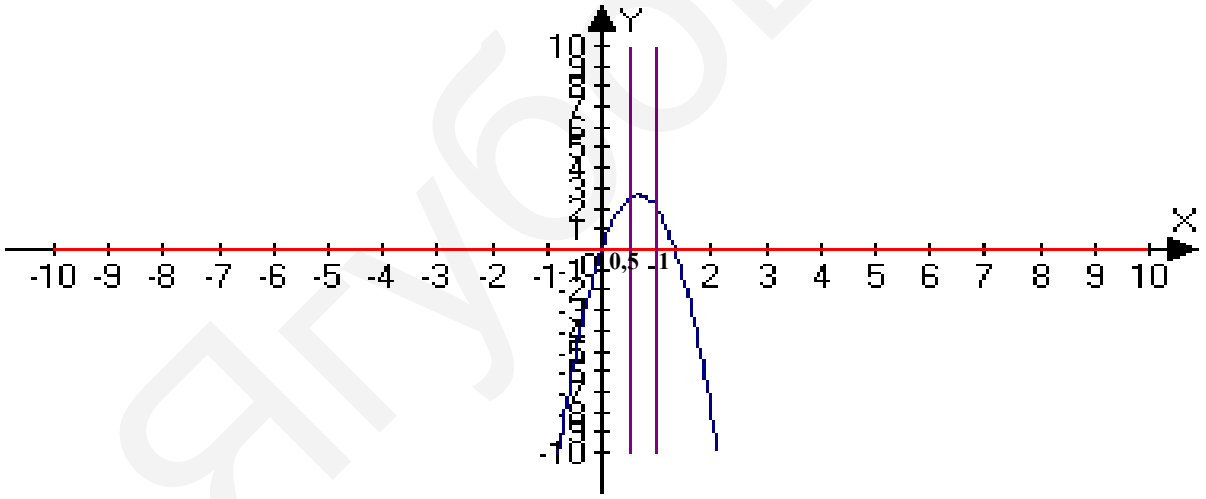
Условие существования корня: $5x + 18 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3{,}6$

Значит корни этого уравнения $x_1 = -3{,}6$ и $x_2 = 4$. $x_1+x_2 = 0{,}4$.

Записать ответ: 0,4.

B3 Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8x-6x^2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=0$

Построим графики функций на координатной плоскости



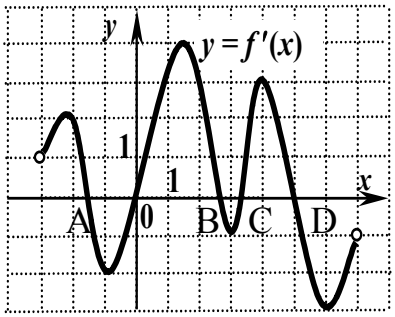
Площадь фигуры между прямыми x = 0,5 и x =1 графиком параболы и осью OX будет вычисляться: $\int_{0,5}^{1}(8x-6x^2)dx=(4x^2-2x^3)|_{0,5}^{1}=4-2-(4\cdot0{,}25-2\cdot0{,}125)=1{,}25.$

Записать ответ: 1,25.

B4 Функция $y=f(x)$ определена на промежутке (–3; 7). График ее производной изображен на рисунке. Укажите число точек минимума функции $y=f(x)$ на промежутке (–3; 7).

Ягубов.рф

Минимум функции будет в точке, где значение производной равно нулю и производная меняет знак в этой точке с минуса на плюс, т.е. функция сначала убывает, а потом возрастает. Из четырèх значений нуля – такие точки (начало координат и точка С).
Записать ответ: 2.



B5 Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{40}{2^x + 3^x}$ на промежутке [1; 7].

Функция монотонно убывает на этом промежутке, значит наименьшее значение функции в точке с координатой x = 7, а наибольшее в точке с координатой x = 1.
Найдѐм наибольшее значение функции.

$\acute{o}_{iàèá.} = \frac{40}{2+3} = 8.$

Записать ответ 8.

B6 Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln(x - 2|x-3|)$.

Решение: Область определения множество x удовлетворяющее неравенству

$$x - 2|x-3| > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 3, \\ x - 2(x-3) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x - 2(3-x) > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 3, \\ x < 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x > 2 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow X = (2;3) \cup [3;6).$$

Числа входящие в область определения: 3, 4, 5. Сумма будет 3+4+5=12.
Записать ответ: 12.

*** B7** Планируя выпуск нового электронного прибора, экономисты предприятия определили, что в первый месяц может быть изготовлено

ЯГУБОВ.РФ

200 приборов. Далее предполагалось ежемесячно увеличивать выпуск на 20 изделий. За сколько месяцев предприятие сможет изготовить по этому плану 11000 приборов?

Решение: Выпуск изделий осуществляется по арифметической прогрессии у которой a_1 =200, d = 20, S = 11000, n – число месяцев.

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(2a_1+d(n-1))n}{2}=11000\Rightarrow 400n-20n+20n^2=22000\Rightarrow n^2+19n-1100=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n_1=-44,\\ n_2=25.\end{array}\right.$$

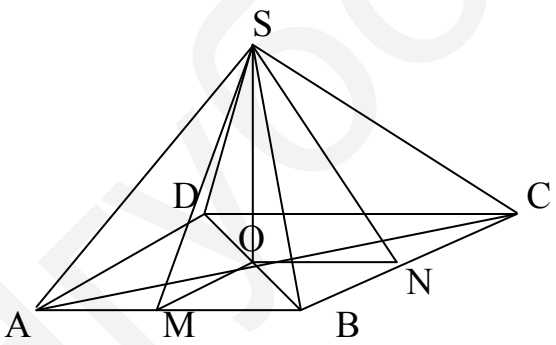
Число месяцев больше нуля, значит число месяцев будет 25.
Записать ответ: 25.

*** B8** Двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды равны 45°, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

Основание пирамиды – квадрат. Т.к. двугранные углы равны 45 градусов, то в прямоугольном треугольнике SON SO = ON, Сторона квадрата равна 2ON = 2OS=2x

$S_{б.}= 4\cdot\frac{1}{2}BC\cdot SN=2\cdot 2x\sqrt{x^2+x^2}=4x^2\sqrt{2}=36\sqrt{2}\Rightarrow x=3.$ Сторона квадрата равна 2*3=6.

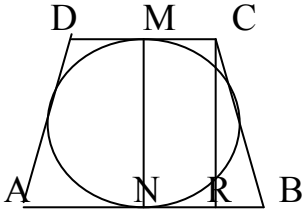
Высота пирамиды равна 3.



Объѐм пирамиды вычислим по формуле $V=\frac{1}{3}S_{\hat{e}\hat{a}}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 3=36.$

Записать ответ: 36.

*** B9** В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.



Площадь трапеции вычисляется по формуле $S=\frac{DC+AB}{2}\cdot MN.$ По условию задачи DA = CB и ∠DAB = ∠CBA = 60°. Высота трапеции равна диаметру вписанной в неѐ окружности CR = MN =2r. Для четырѐхугольника вписанного в окружность выполняется свойство: DC+AB = AD+BC = 2BC. CR= BC*sin60°. BC $=\frac{2r}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4r\sqrt{3}}{3}$.

Значит $S=\frac{8r\sqrt{3}}{2\cdot 3}\cdot 2r=24\sqrt{3}\Rightarrow r^2=9\Rightarrow r=3.$

Записать ответ: 3.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания этой части (С1 – С4) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер задания (С1 и т.д.), а затем полное решение.

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_{0,9}(2y-3x+1)=0,\\ 0,5\log_2(3y-x-1,5)+\log_4(8x)=0\end{cases}$.

$$\begin{cases}2y-3x+1=1,\\ 0,5(\log_2(3y-x-1,5)+\log_2(8x))=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1,5x,\\ 8x(4,5x-x-1,5)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1,5x,\\ 28x^2-12x-1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=1,5x,\\ \frac{D}{4}=36+28=64, x_{1,2}=\frac{6\pm 8}{28}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{cases}x_1=0,5,\\ y_1=1,5\cdot 0,5=0,75\end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases}x_2=-\frac{1}{14},\\ y_2=-\frac{15}{140.}\end{cases}\right.$$

Проверим решение:

$\begin{cases}\log_{0,9}(2\cdot 0,75-3\cdot 0,5+1)=\log_{0,9}1=0-\text{âåðíî}\\ 0,5\log_2(2,25-0,5-1,5)+\log_4 4=\log_2 1=0-\text{âåðíî}\end{cases}$

Решение (0,5; 0,75) – есть решение.

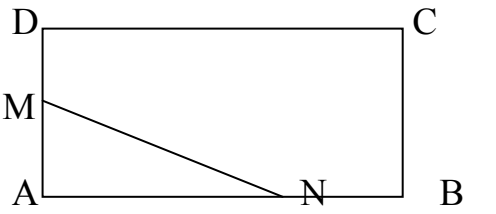
Проверим вторую пару.

$\log_{0,9}(-\frac{15}{70}+\frac{3}{14}+1)=\log_{0,9}1=0-\text{âåðíîå}$,

$0,5\log_2(-\frac{45}{140}+\frac{1}{14}-1,5)+\log_4(-\frac{4}{7})-\text{íå_ñóùåñòâóåò}$

Записать ответ : Решение (0,5; 0,75).

C2 Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.



Пусть MA = x, AN = y => MN = $\sqrt{x^2+y^2}$ По условию периметр треугольника равен 8 => x+y+$\sqrt{x^2+y^2}$ =8. Найдѐм оставшуюся площадь прямоугольника $S = 10 - \frac{xy}{2}$ Выразим y через x из первого уравнения

$(8-(x+y))^2 = x^2 + y^2$ => $64-16(x+y) + 2xy = 0$ => $-xy+8y = 32 - 8x$ => $y = \frac{8(x-4)}{\tilde{o}-8}$.

Подставим в функцию S(x) вместо y

$S(x) = 10 - \frac{4x(x-4)}{x-8} = 10 - \frac{4x^2-16x}{x-8}$.

Исследуем функцию на экстремум. Найдѐм производную

$$S'(x) = -\frac{(8x-16)(x-8)-(4x^2-16x)}{(x-8)^2} = -\frac{4x^2-64x+128}{(x-8)^2} = -\frac{4(x^2-16x+32)}{(x-8)^2}$$

Решим уравнение S'(x)=0.

Получаем $x^2 - 16x + 32 = 0$; D/4 = 64-32=32 => $x_{1,2} = 8 \pm 4\sqrt{2}$

Ветви параболы направлены вниз и $2 < 8 - 4\sqrt{2} < 8 + 4\sqrt{2}$.

Значит на отрезке (0; 2) функция принимает наименьшее значение в точке x = 2.

Найдем значение функции в этой точке.

$S_{íàèì.} = 10 - \frac{8(2-4)}{2-8} = 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$.

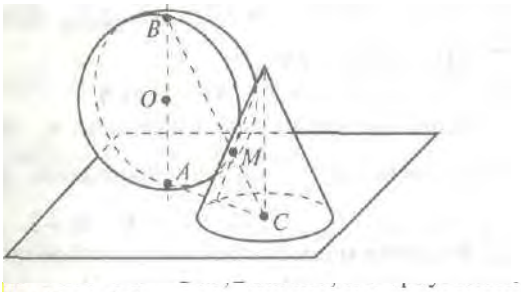
Верный ответ: $7\frac{1}{3}$.

*** C3** Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A. В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A, проходит через точку M. Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если AC = 1.

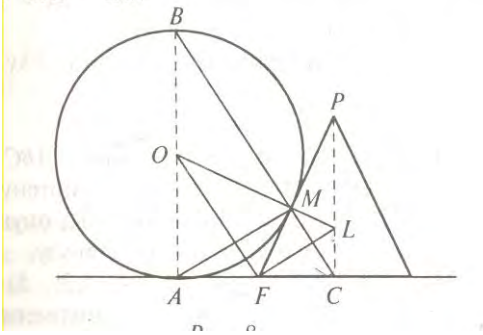
Алгебр.рф

Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку С) и точку сферы, диаметрально противоположную точке *A,* проходит через точку *M.* Точка *M* является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если *AC* = 1.

Решение. I. Проведем сечение сферы и конуса плоскостью, проходящей через точки *A, B, C* (рис. 7). В этой плоскости лежит образующая *PF* конуса, проходящая через точку *M.* Сечение сферы - окружность. Значит, *PF* — касательная к этой окружности (рис.).



ML = LC.



2. *PC //AB,* значит, ∠*ABM* = ∠*MCP* и ∠*BOM* = ∠*MLC,* следовательно, Δ*OBM* ~ Δ*LMC.* В треугольнике *OBM OB* = *OM,* значит, и в треугольнике *MLC ML* = *LC.*

3. Так как *PF* — касательная, то *OM* ⊥ *PF.* Прямоугольные треугольники *FML* и LCF равны по катету *(ML* = *LC* и гипотенузе, следовательно, *MF*= *FC.*

4. По свойству касательных *AF* = *FM.* Так как *FM* — медиана прямоугольного треугольника,

FM=0,5*AC* = 0,5.

FM ⊥*OM,* а *FC*⊥*OA,* значит, ∠*MFC* = ∠*AOM.*

AC 1

5. Пусть ∠*ABC* = *α.* Тогда $\text{tg}\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4}$. Угол *AOM* — центральный, а угол *ABC* — вписанный в окружность, значит, ∠*MFC* = ∠*AOM* = 2∠*ABC.* Найдем высоту конуса: *PC* = *FC* • tg 2α = 0,5tg2α; $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, тогда PC = $\frac{4}{15}$.

C4. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-2) \le (a+1)(|x-1|-1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

ЯУСОВ.РФ

Решение. Соберем все члены неравенства в левую часть и раскроем скобки:
x^2 -2x - (a + 1)|x - 1| + a + 1 ≤ 0;
x^2 - 2x + 1 - (a + 1)|x - 1| + a ≤ 0;
$|x - 1|^2$ - (a + 1)|x - 1| + a ≤ 0;
(|x-1|-1)(|x -1| - a) ≤ 0.
Пусть |x - 1| = t. Тогда последнее неравенство принимает вид *(t — 1)*(t— *a)* ≤ 0.
Корни квадратного трехчлена *(t — 1)(t — a)* — числа о и 1. Ветви параболы *f(t) = (t— 1)(t — a)* направлены вверх, следовательно, значения выражения |*x*— 1| располагаются между числами 1 и *a.*
При сравнении чисел 1 и *a* заметим, что при подстановке в исходное неравенство его решения — числа 1,7- получаем: 1,7 · (—0,3) ≤ *(a* + 1) ·(-0,3); 1,7 ≥ *a* + 1; *a* ≤ 0,7. Поэтому неравенство
(|x- 1|- 1*)(|x*- 1|-*a)≤ 0* равносильно неравенству *a* < |x — 1| ≤ 1.
Если *a* ≤ 0, то неравенство *a* ≤ |x—1| верно при любых значениях x. Неравенство |x-1| ≤ 1 означает, что число x удалено от 1 не более чем на 1, т.е. [0; 2] — множество решений этого неравенства. Отрезок [0; *2*] содержит все члены любой геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7 и знаменателем q ∈(0;1).
Значит, все значения *a* от 0 до 2 удовлетворяют условию.
Если 0 < *a* ≤0,7, то множеством решений неравенства *a* < |x – 1| ≤1 является [0; 1 — a] U [1 + a; 2]. Так как 1+a≤1,7, то отрезок [1+a;2] содержит число 1,7— первый член прогрессии. Знаменатель *q* > 0 прогрессии всегда можно выбрать так, чтобы *1,7q* ≤1 — *a.* Например, *q* = 0,1. Тогда все члены такой бесконечно убывающей прогрессии, начиная со второго, будут лежать в отрезке [0; 1 — *a*]. Значит, такие *a* удовлетворяют условию.
Ответ: (— оо; 0,7].

Ягубов.рф