Московский государственный технический

университет им. Н. Э. Баумана.

Домашнее задание №1

по дисциплине:

«МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

ВАРИАНТ 15

Выполнил:

студент **3**-го курса, гр. **АК3-51**

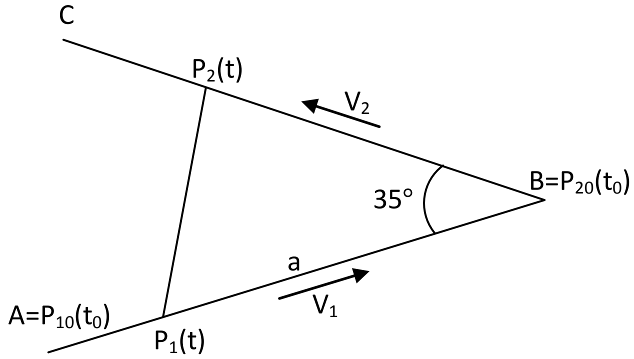
Ягубов Роман Борисович

Проверил:

Бушуев Александр Юрьевич

г. Москва

Задача №1



Точка P_1 движется в направлении от A к B с постоянной скоростью $V_1 = 0{,}2$ м/с. В тот момент, когда P_1 проходит через A, другая точка P_2 выходит из B и движется с постоянной скоростью $V_2 = 0{,}1$ м/с по направлению к C. Определить время t, при котором расстояние P_1P_2 будет наименьшим. Принять: $a = AB = 2$м, угол $ABC = 35^{\circ}$.

Аналитическое решение

Найдем начальное и конечное значение времени t:

$$t_{н} = 0\ c,\ t_{к} = \frac{a}{V_1} = \frac{2}{0{,}2} = 10\ c$$

Составим и решим функцию для поставленной задачи.

По теореме cos:

$$(P_1P_2)^2 = (P_1B)^2 + (P_2B)^2 - 2(P_1B)(P_2B)\cos(ABC) = (a - V_1t)^2 + (V_2t)^2 - 2(a - V_1t)(V_2t)\cos(ABC) =$$
$$t^2(V_1^2 + 2V_1V_2\cos(ABC) + V_2^2) - t * 2a(V_1 + V_2\cos(ABC)) + a^2$$

Найдем производную функции с целью поиска экстремума:

$$(P_1P_2)^{2'} = 2t(V_1^2 + 2V_1V_2\cos(ABC) + V_2^2) - 2a(V_1 + V_2\cos(ABC)) = 0$$

$$t_{min} = \frac{a(V_1 + V_2\cos(ABC))}{(V_1^2 + 2V_1V_2\cos(ABC) + V_2^2)} = \frac{2(0{,}2\ + 0{,}1 * 0{,}82)}{(0{,}2^2\ + 2 * 0{,}2 * 0{,}1 * 0{,}82 + 0{,}1^2)} \approx 6{,}81235012$$

$$(P_1P_2)^2(t_{min}) = 6{,}81234^2(0{,}2^2 + 2 * 0{,}2 * 0{,}1 * 0{,}82 + 0{,}1^2) - 6{,}81234 * 2 * 2(0{,}2 + 0{,}1 * 0{,}82) + 2^2 \approx 0{,}1589843651$$

$$(P_1P_2)(t_{min}) = \sqrt{6{,}81234^2(0{,}2^2 + 2 * 0{,}2 * 0{,}1 * 0{,}82 + 0{,}1^2) - 6{,}81234 * 2 * 2(0{,}2 + 0{,}1 * 0{,}82) + 2^2} \approx 0.39872843527895$$

Составим таблицу:

t	$t_{н} = 0$	$(t_{н}; t_{min})$	$t_{min} \approx 6{,}81235012$	$(t_{min}; t_{к})$	$t_{к} = 10\ c$
$(P_1P_2)^{2'}$	$-1{,}12766$	$-$	0	$+$	0,527661
$(P_1P_2)^2$	4	↘	0,1589843651	↗	1
(P_1P_2)	2	↘	0.39872843527895	↗	1

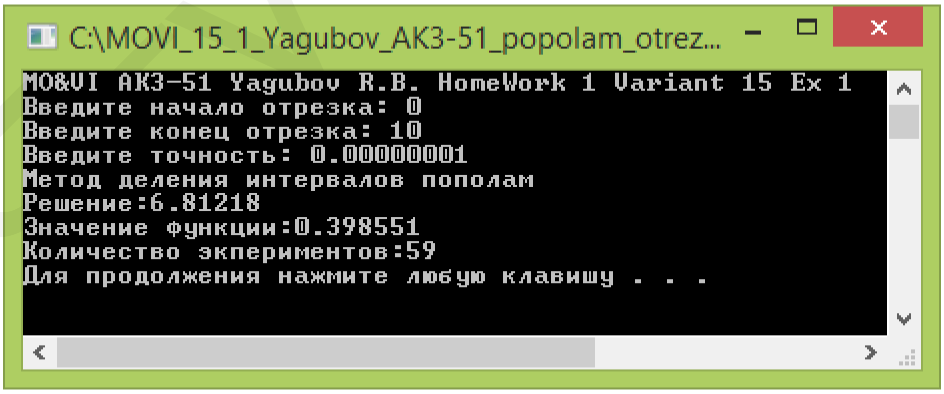
Решение методом деления интервалов пополам в C++

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
const double v1=0.2, v2=0.1, ab=2, ugl=35, pi=3.14;
const int M=50;

 double func(const double & t)
{
	return t*t*(v1*v1+2*v1*v2*cos(ugl*pi/180)+v2*v2)-2*ab*t*(v1+v2*cos(ugl*pi/180))+ab*ab;
}

void main()
{
	setlocale(LC_ALL, "Russian");
	double a,b,E,N,x[M],y[M];
	int j;
    cout<<"MO&VI AK3-51 Yagubov R.B. HomeWork 1 Variant 15 Ex 1"<<endl;
    cout<<"Введите начало отрезка: "; cin>>a;
    cout<<"Введите конец отрезка: "; cin>>b;
    cout<<"Введите точность: "; cin>>E;
	x[2]=(a+b)/2.0;
	y[2]=func(x[2]); N=1;
	ALG: x[1]=(a+x[2])/2.0; x[3]=(x[2]+b)/2.0;
	       y[1]=func(x[1]);    y[3]=func(x[3]);
	  N=N+2; x[0]=a; x[4]=b;
	if (y[1]<y[2])
		if (y[1]<y[3]) j=1; else j=3;
	else
		if (y[2]<y[3]) j=2; else j=3;
		a=x[j-1]; b=x[j+1];
		x[2]=x[j]; y[2]=y[j];
	if ((b-a)>2.0*E) goto ALG; else x[5]=x[2];
	y[5]=y[2];
    cout<<"Метод деления интервалов пополам"<<endl;
    cout<<"Решение:"<<x[5]<<endl;
    cout<<"Значение функции:"<<sqrt(y[5])<<endl;
    cout<<"Количество экпериментов:"<<N<<endl;
    system("pause");
 }
```

Результаты вычислений в C++



Сравнение результатов

Метод	Аналитический	Деление пополам
t	6,81235012	6,81218
(P_1P_2)	0.39872843527895	0,398551

Задача №2

Метод конфигурации Хука-Дживса с выбором оптимального шага.

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1e^{-x_2} + e^{-2x_2} + 10.9(x_2 + e^{-x_1})$$

Алгоритм

Метод Хука-Дживса был разработан в 1961 году, но до сих пор является весьма эффективным и оригинальным. Поиск состоит из последовательности шагов исследующего поиска вокруг базисной точки , за которой в случае успеха следует поиск по образцу. Он применяется для решения задачи минимизирования функции без учета ограничений .

Описание этой процедуры представлено ниже:

А. Выбрать начальную базисную точку b_1 и шаг длиной h_1 для каждой переменной x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. В приведенной ниже программе для каждой переменной используется шаг h, однако указанная выше модификация тоже может оказаться полезной.

Б. Вычислить f (x) в базисной точке b_1 с целью получения сведений о локальном поведении функции f (x). Эти сведения будут использоваться для нахождения подходящего направления поиска по образцу, с помощью которого можно надеяться достичь большего убывания значения функции. Функция f(x) в базисной точке b_1, находится следующим образом:

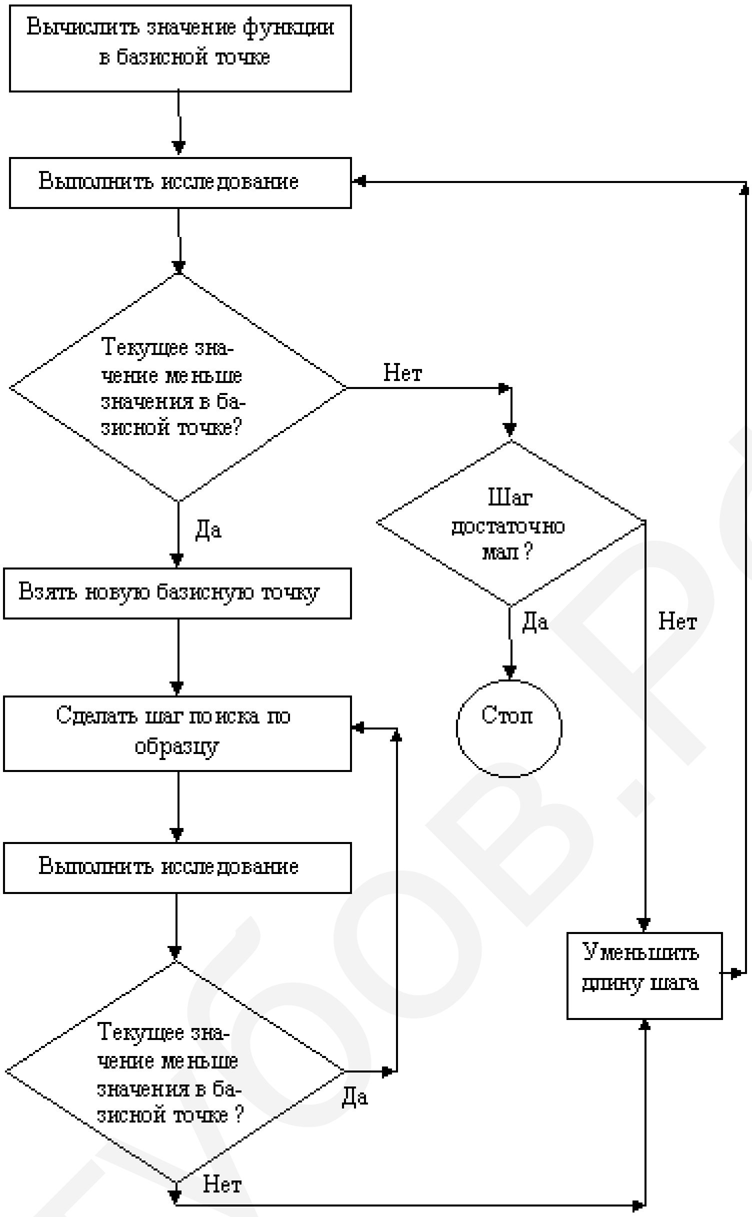
1) 1. Вычисляется значение функции $f(b_1)$ в базисной точке b_1.
2) 2. Каждая переменная по очереди изменяется прибавлением длины шага. Таким образом, мы вычисляем значение функции $f(b_1+h_1e_1)$, где e_1 – единичный вектор в направлении оси x_1. Если это приводит к уменьшению значения функции, то b_1 заменяется на $b_1+h_1e_1$. В противном случае вычисляется значение функции $f(b_1-h_1e_1)$, и если ее значение уменьшилось, то b_1 заменяем на $b_1-h_1e_1$. Если ни один из проделанных шагов не приводит к уменьшению значения функции, то точка b_1 остается неизменной и рассматриваются изменения в направлении оси x_2, т. е. находится значение функции $f(b_1+h_2e_2)$ и т. д. Когда будут рассмотрены все n переменные, мы будем иметь новую базисную точку b_2.
3) 3. Если $b_2=b_1$, т. е. уменьшение функции не было достигнуто, то исследование повторяется вокруг той же базисной точки b_1, но с уменьшенной длиной шага. На практике удовлетворительным является уменьшение шага (шагов) в десять раз от начальной длины.
4) 4. Если $b_2 \neq b_1$, то производится поиск по образцу.

В. При поиске по образцу используется информация, полученная в процессе исследования, и минимизация функции завершается поиском в направлении, заданном образцом. Эта процедура производится следующим образом:

1) Разумно двигаться из базисной точки b_2 в направлении b_2-b_1, поскольку поиск в этом направлении уже привел к уменьшению значения функции. Поэтому вычислим функцию в точке образца $P_1=b_1+2(b_2-b_1)$. В общем случае $P_i=b_i+2(b_{i+1}-b_i)$.
2) Затем исследование следует продолжать вокруг точки P_1 (P_i) .
3) Если наименьшее значение на шаге В, 2 меньше значения в базисной точке b_2 (в общем случае b_{i+1}), то получают новую базисную точку b_3 (b_{i+2}), после чего следует повторить шаг В, 1. В противном случае не производить поиск по образцу из точки b_2 (b_{i+1}), а продолжить исследования в точке b_2 (b_{i+1}).

Г. Завершить этот процесс, когда длина шага (длины шагов) будет уменьшена до заданного малого значения.

Блок-схема



Код программы в С++

```
#include <math.h>
#include <iostream>
using namespace std;
double k,h,z,ps,bs,fb,fi;
int i,j,n,fe;
double x[10];
double y[10];
double b[10];
double p[10];
double f() {
    double z;
    z=pow(x[1],2) + 2*x[1]*exp(-x[2]) + exp(-2*x[2]) + 10.9*(x[2]+exp(-x[1]));
    //if ((x[1]<0) || (x[2]<0) || (x[1]+x[2]<4)) z=1.7e+38;
    fe++;
    return z;
}
```

```
double calculate(){
    k=h;
    fe=0;
    for (i=1; i<=n; i++) {
        y[i]=x[i];
        p[i]=x[i];
        b[i]=x[i];
    }
    z = f();
    fi=z;
    printf("Начальное значение функции %.2lf\n",z);
    for (i=1;i<=n;i++)
        printf("%.2lf;",x[i]);
    printf("\n");
    ps=0;
    bs=1;
    // Исследование вокруг базисной точки
    j=1;
    fb=fi;

label0:
    x[j]=y[j]+k;
    z=f();
    if (z<fi) goto label1;
    x[j]=y[j]-k;
    z=f();
    if (z<fi) goto label1;
    x[j]=y[j];
    goto label2;

label1:
    y[j]=x[j];

label2:
    z=f();
    fi=z;
    printf("\nПробный шаг: %.2lf ",z);
    printf("(");
    for (i=1; i<=n;i++) printf("%.2lf;",x[i]);
    printf(" )");
    if (j==n) goto label3;
    j++;
    goto label0;

label3:
    if (fi<fb-1e-08) goto label6;
    //После оператора 3, если функция не уменьшилась
    //Произвести поиск по образцу.
    if ( (ps==1) & (bs==0)) goto label4;
    //Но если исследование приизводилось вокруг точки
    //и уменьшение функции не было достигнуто,
    //то изменить базисную точку в операторе 4
    //в противном случае уменьшить длину шага в операторе.
    goto label5;

label4:
    for (i=1; i<=n;i++) {
        p[i]=b[i];
        y[i]=b[i];
        x[i]=b[i];
    }
    z=f();
```

```
    bs=1;
    ps=0;
    fi=z;
    fb=z;
    printf("\nЗамена базисной точки %.2lf ",z);
    printf("(");
    for (i=1;i<=n;i++)
        printf("%.2lf;",x[i]);
    printf(")");
    //И провести исследование вокруг базисной точки.
    j=1;goto label0;

label5:
    k=k/10;
    printf("\nУменьшить длину шага");
    if (k<1e-08) goto label7;
    //Если поиск не закончен, то провести новое
    //исследование вокруг новой базисной точки
    j=1;
    goto label0;

    // Поиск по образцу
label6:
    for (i=1;i<=n;i++) {
        p[i]=2*y[i]-b[i];
        b[i]=y[i];
        x[i]=p[i];
        y[i]=x[i];
    }
    z=f();
    fb=fi;
    ps=1;
    bs=0;
    fi=z;
    printf("\nПоиск по образцу: %.2lf ",z);
    printf("(");
    for (i=1; i<=n; i++) {
        printf("%.2lf;",x[i]);
    }
    printf(")");
    //После этого произвести исследование вокруг
    //последней точки
    j=1;
    goto label0;

label7:
    printf("\nМинимум найден\n");
    printf("(");
    for (i=1;i<=n; i++) {
        printf("%.2lf;",p[i]);
    }
    printf(")");
    return 0;
}

int main () {
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    printf("Метод Хука-Дживса\n");
    printf("Введите число переменных: ");
    cin >> n;
    printf("\nВведите начальную точку x1,x2,...,xN\n");
    for (i=1; i<=n; i++) {
```

```
            cin >> x[i];
        }
        printf("\nВведите длину шага\n");
        cin >> h;
        calculate();
        printf("\nМинимум функции равен %.2lf",fb);
        printf("\nКоличество вычислений функции равно %d\n",fe);
          return 0;
}
```

Результаты вычислений в C++

Метод Хука-Дживса
Введите число переменных: 2
Введите начальную точку x1,x2,...,xN 1 1
Введите длину шага 1
Начальное значение функции 16. 78 (1.00;1.00;)
Пробный шаг: 16.78 (1.00;1.00;)
Пробный шаг: 8.01 (1.00;0.00;)
Поиск по образцу: 6.94 (1.00;-1.00;)
Пробный шаг: 6.94 (1.00;-1.00;)
Пробный шаг: 6.94 (1.00;-1.00;)
Поиск по образцу: 52.59 (1.00;-2.00;)
Пробный шаг: 43.70 (0.00;-2.00;)
Пробный шаг: 7.39 (0.00;-1.00;)
Замена базисной точки 6.94 (1.00;-1.00;)
Пробный шаг: 6.94 (1.00;-1.00;)
Пробный шаг: 6.94 (1.00;-1.00;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 6.62 (0.90;-1.00;)
Пробный шаг: 5.91 (0.90;-0.90;)
Поиск по образцу: 5.33 (0.80;-0.80;)
Пробный шаг: 5.25 (0.70;-0.80;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Поиск по образцу: 5.78 (0.50;-0.50;)
Пробный шаг: 5.59 (0.60;-0.50;)
Пробный шаг: 5.31 (0.60;-0.60;)
Замена базисной точки 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Поиск по образцу: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Замена базисной точки 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Поиск по образцу: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Поиск по образцу: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Замена базисной точки 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Пробный шаг: 5.15 (0.70;-0.70;)
Уменьшить длину шага
Минимум найден (0.70;-0.70;)
Минимум функции равен 5.15
Количество вычислений функции равно 119

Задача №3

Найти значения переменных **x₁...x₂**, при которых функция: $Q(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$, при условии:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_1 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + s_1 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 30 \\ 2x_1 + s_3 = 16 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решение

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
s_1	3	1	1	0	0	21	21 / 3 = 7
s_2	2	3	0	1	0	30	30 / 2 = 15
s_3	2	0	0	0	1	16	16 / 2 = 8
Q	3	2	0	0	0	0	--

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	7	$7 / \frac{1}{3} = 21$
s_2	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	0	16	$16 / \frac{7}{3} = \frac{48}{7}$
s_3	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0	1	2	--
Q	0	1	-1	0	0	-21	--

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
x_1	1	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$\frac{33}{7}$	--
x_2	0	1	$\frac{-2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{48}{7}$	--
s_3	0	0	$\frac{-6}{7}$	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{46}{7}$	--
Q	0	0	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-3}{7}$	0	$\frac{-195}{7}$	--

Достигнуто оптимальное решение, т.к. в строке целевой функции нет положительных коэффициентов.

$$\mathbf{Q(x) = \frac{195}{7}, x_1 = \frac{33}{7}, x_2 = \frac{48}{7}, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = \frac{46}{7}}$$

Задача №4

Решить задачу используя метод Куна-Таккера

$$f(x) = x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

Решение

$$L = \lambda_0(x_1 + x_2) + \lambda_{\mathbf{1}}(2x_1 + x_2 - 4) - x_1\lambda_{\mathbf{2}} - x_2\lambda_{\mathbf{3}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dx_1} = \lambda_0 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1) \\ \dfrac{dL}{dx_2} = \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1(2x_1 + x_2 - 4) = 0 & (3) \\ x_1\lambda_2 = 0 & (4) \\ x_2\lambda_3 = 0 & (5) \\ \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 & (6) \end{cases}$$

Все $2^4 = 16$ вариантов

№	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	x_1	x_2	$f(x)$
1	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
2	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
3	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
4	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
5	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
6	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
7	0	0	0	0	+	+	+	+	+	–			
8	0						–	+	+	+	0	0	
9	1	0	0	0	–								
10	1	0	0	1	–								
11	1	-0.5	0	0	+	–							
12	1	0	1	0		–							
13	1	0	1	1	+	+	+	+	+	+	0	0	0
14	1	-0.5	0	0.5	+	+	+	+	+	+	2	0	2
15	1	-1	-1	0	+	+	+	+	+	+	0	4	4
16	1						–	+	+	+	0	0	

T_{13} – условно-стационарная точка, удовлетворяет необходимым условиям минимума первого порядка, в ней активны ограничения g_2и g_3 и они выполняются. Следовательно выполняются достаточные условия минимума первого порядка, T_{13} – минимум.

T_{15} – условно-стационарная точка, удовлетворяет необходимым условиям максимума первого порядка, в ней активны ограничения g_1и g_2 и они выполняются. Следовательно выполняются достаточные условия максимума первого порядка, T_{15} – максимум.

Задача №5

Решить задачу методом возможных направлений:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 \to \min \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Используем метод возможных направлений для случая линейных ограничений.

Ш.0. Выберем начальную точку и вычислим в ней градиент функции:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f'(x^0) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 10 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x^0} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверим активность ограничений для выбранной точки:

$I_0^0 = J_0^0 = \varnothing$, направление перемещения совпадает с антиградиентом функции в данной точке:

$d^0 = -f'(x^0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$, Найдем шаг $S_0 = \min(S^*, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2);$

$$f(x^0 + Sd^0) = f(\frac{1}{2} + S; 1 + 10S) = (\frac{1}{2} + S)^2 + (1 + 10S)^2 - 2(\frac{1}{2} + S)(1 + 10S) - 10(\frac{1}{2} + S) \to \min;$$

$f'(x^0 + Sd^0) = 0 \Rightarrow S = \dfrac{13}{37}$. Так как $\langle a^i, d^k \rangle > 0$,то

$$\bar{S}_1 = \frac{b_1 - \langle a^1, x^0 \rangle}{\langle a^1, d^0 \rangle} = \frac{10 - (1+2)}{6} = \frac{7}{6} \qquad \bar{S}_2 = \frac{b_2 - \langle a^2, x^0 \rangle}{\langle a^2, d^0 \rangle} = \frac{6 - (10-2)}{8} = -\frac{1}{4}$$

Тогда $S_0 = \min(S^*, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2) = \dfrac{13}{37}$ Получим следующую точку : $x^1 = x^0 + S_0 d^0 = \begin{pmatrix} \frac{167}{37} \\ \frac{11}{37} \end{pmatrix}$

Ш.1. Выберем начальную точку и вычислим в ней градиент функции:

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{167}{37} \\ \frac{11}{37} \end{pmatrix}, \qquad f'(x^1) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 10 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x^1} = \begin{pmatrix} -58/37 \\ -290/37 \end{pmatrix}$$

Проверим активность ограничений для выбранной точки:

$I_0^0 = J_0^0 = \varnothing$, направление перемещения совпадает с антиградиентом функции в данной точке:

$$d^1 = -f'(x^1) = \begin{pmatrix} 58/37 \\ 290/37 \end{pmatrix}$$

Найдем шаг $S_0 = \min(S^*, \overline{S}_1, \overline{S}_2, \widehat{S}_1, \widehat{S}_2)$; $f'(x^1 + Sd^1) = 0 \Rightarrow S = \dfrac{13}{41}$. Так как $\langle a^i, d^k \rangle > 0$,то

$$\overline{S}_1 = \frac{b_1 - \langle a^1, x^1 \rangle}{\langle a^1, d^1 \rangle} = 181/638 = 0.28 \qquad \overline{S}_2 = \frac{b_2 - \langle a^2, x^1 \rangle}{\langle a^2, d^1 \rangle} = \frac{6-(10-2)}{8} = \frac{11}{87} = 0.12$$

Тогда $S_1 = \min(S^*, \overline{S}_1, \overline{S}_2, \widehat{S}_1, \widehat{S}_2) = \dfrac{11}{87}$ Получим следующую точку : $x^2 = x^1 + S_1 d^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{523}{111} \\ \dfrac{143}{111} \end{pmatrix}$

Ш.2. Повторим аналогичные шаги алгоритма:

$$f'(x^2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 10 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x^1} = \begin{pmatrix} -350/111 \\ -158/37 \end{pmatrix} \quad I_0^1 = \{1\},\ J_0^1 = \varnothing .$$

Множество активных ограничений не пусто - составим экстремальную задачу:

$$\begin{cases} -350/111\left(d_1^{+1} - d_1^{-1}\right) - 158/37\left(d_2^{+1} - d_2^{-1}\right) \to \min; \\ \left(d_1^{+1} - d_1^{-1}\right) + \left(d_2^{+1} - d_2^{-1}\right) \le 0 \\ d_1^{+1} + d_1^{-1} + d_2^{+1} + d_2^{-1} \le 1 \end{cases}$$

Решим задачу симплекс-методом:

БН	d_1^{+1}	d_1^{-1}	d_2^{+1}	d_2^{-1}	u_1	u_2	b
u_1	1	-1	1	-1	1	0	0
u_2	1	1	1	1	0	1	1
Δ_j	$-^{350}/_{111}$	$^{350}/_{111}$	$^{-158}/_{37}$	$^{158}/_{37}$	0	0	0
БН	d_1^{+1}	d_1^{-1}	d_2^{+1}	d_2^{-1}	u_1	u_2	
d_1^{+1}	1	0	1	0	$^{1}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	$^{1}/_{2}$
d_2^{-1}	0	1	0	1	$^{-1}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	$^{1}/_{2}$
Δ_j	$^{124}/_{111}$	0	0	$^{124}/_{111}$	$^{412}/_{111}$	$^{62}/_{111}$	$^{62}/_{111}$

Получим $d^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Найдем шаг S_1: $f'(x^2 + Sd^2) = 0 \Rightarrow S = \frac{124}{555}$

Поскольку 1) $\left\langle a^2, d^2 \right\rangle = 0$ То $\overline{S}_1 = +\infty$. 2)$\left\langle a^1, d^2 \right\rangle = 0,5 - 1 = -0,5$ $\overline{S}_2 = +\infty$.

Так как $d_1^2 = 0,5 \geq 0$, то $\widehat{S}_1 = +\infty$. Выберем $\widehat{S}_2$. Поскольку $d_2^2 = -\frac{1}{2} < 0$, то $\widehat{S}_2 = -\frac{x_2^1}{d_2^2} = \frac{286}{111}$;

$S_1 = \min(S^*, \overline{S}_1, \overline{S}_2, \widehat{S}_1, \widehat{S}_2) = \frac{124}{555}$. Найдем новое приближение: $x^3 = x^2 + S_2 d^2 = \begin{pmatrix} 4.6 \\ 1.4 \end{pmatrix}$

Ш.3. Повторим действия, аналогичные **Ш.2**:

$$f'(x^3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 10 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x^1} = \begin{pmatrix} -3.6 \\ -3.6 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} I_0^2 = \{1\} \\ J_0^2 = \varnothing \end{matrix}; \qquad \begin{cases} -3.6\left(d_1^{+2} - d_1^{-2}\right) - 3.6\left(d_2^{+2} - d_2^{-2}\right) \to \min; \\ \left(d_1^{+2} - d_1^{-2}\right) + \left(d_2^{+2} - d_2^{-2}\right) + u_1 = 0 \\ d_1^{+2} + d_1^{-2} + d_2^{+2} + d_2^{-2} + u_2 = 1 \end{cases}$$

Решим систему симплекс методом:

БН	d_1^{+1}	d_1^{-1}	d_2^{+1}	d_2^{-1}	u_1	u_2	b
u_1	1	-1	1	-1	1	0	0
u_2	1	1	1	1	0	1	1
Δ_j	-3.6	3.6	-3.6	3.6	0	0	0
БН	d_1^{+1}	d_1^{-1}	d_2^{+1}	d_2^{-1}	u_1	u_2	
d_1^{+1}	1	-1	1	-1	1	0	0
d_2^{-1}	0	2	0	2	-1	1	1
Δ_j	0	0	0	0	-3.6	0	0

Получим $d_1^{+2} = 0$, $u_2 = 1$ $\Rightarrow d^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, это означает, что задача решена точно.

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 4.6 \\ 1.4 \end{pmatrix}, f(x^*) = -33,8$