2) Пусть даны линейные многообразия $L = a + U$, $M = c + W$, где

$$U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$W = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$$

$$a = (7, -8, 5, 9, 4)$$

$$c = (13, -25, 12, 18, -6)$$

$$b_1 = (7, 6, 2, 2, 9)$$

$$b_2 = (6, -3, 4, 2, -5)$$

$$b_3 = (4, 6, 4, 5, 8)$$

$$d_1 = (-2, -18, 4, 0, -28)$$

$$d_2 = (-1, -9, 2, 0, -14)$$

$$d_3 = (5, -12, 6, 2, -19)$$

а) Найти сумму и пересечение U и W.
б) Для L и M найти задающую их систему линейных уравнений.
в) Найти композит и пересечение L и M.
г) Определить взаимное расположение L и M.

Здесь под $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ понимается линейная оболочка $Lin(b_1, b_2, b_3)$.

а)

Сумма подпространств.

Найти сумму $U \bigcup W$ и пересечение $U \bigcap W$ подпространств - значит указать базисы соответственно суммы и пересечения.

Множество всех векторов x вида $x = a + b$, где $a \in U$, $b \in W$, называют **суммой подпространств** U и W и обозначают как $U + W$. Если при этом пересечение $U \bigcap W$ - нулевое подпространство, то сумму $U + W$ называют **прямой суммой** и обозначают как $U \oplus W$. Если сумма $U + W$ подпространств U и W в X является прямой, то представление любого вектора x в виде $x = a + b$, где $a \in U$, $b \in W$, единственно.

Базис суммы $U \bigcup W$ можно найти как максимальную подсистему линейно независимых столбцов.

Составим матрицу $(b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & -2 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 6 & -18 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 9 & -5 & 8 & -28 & -14 & -19 \end{pmatrix}$.

Путём элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & -2 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 6 & -18 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 9 & -5 & 8 & -28 & -14 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что ранг матрицы равен 3 (количество ненулевых строк в ступенчатой матрице), а один из её базисных миноров располагается на векторах b_1, b_2, b_3. Следовательно, эти векторы составляют базис суммы подпространств $U + W$ (один из базисов):

$$U + W = \mathrm{Lin}(b_1, b_2, b_3), \quad \dim(U + W) = 3.$$

Проверим результат в Mathcad 14:

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & -2 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 6 & -18 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 9 & -5 & 8 & -28 & -14 & -19 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(A) = 3 \quad \mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пересечение подпространств.

Найдём базис подпространства $U \cap W$.

Пусть в линейном пространстве X даны подпространства U и W. Множество $U \cap W$ векторов, принадлежащих как U, так и W, является подпространством в X. Его называют **пересечением подпространств** U и W.

Если пространства U и W заданы однородными системами уравнений, то пересечение $U \cap W$ будет определяться системой, получаемой объединением всех уравнений двух систем. Любая фундаментальная система решений такой системы уравнений даёт базис пересечения $U \cap W$.

Подпространства U и W заданы как линейные оболочки систем векторов [2]. Перейдём к описанию этих подпространств общими уравнениями.

► Составим матрицу $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ и блочную матрицу $\left(B \mid E\right)$:

$$\left(B \mid E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 7 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

► Элементарными преобразованиями над строками блочной матрицы и над её первыми трёмя столбцами приведём левый блок к простейшему виду $\left(\Lambda \mid S\right)$. Для ускорения вычислений получим результат в Mathcad (используем функцию rref):

$$BE := \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rref}(BE) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{41}{86} & -\frac{26}{43} & \frac{6}{43} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{86} & -\frac{10}{43} & -\frac{1}{43} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{23}{43} & -\frac{2}{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{349}{86} & \frac{150}{43} & -\frac{28}{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{86} & -\frac{12}{43} & -\frac{27}{43} \end{pmatrix}$$

$$\left(B \mid E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 7 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -52 & 12 \\ 0 & 86 & 0 & 0 & 0 & 29 & -20 & -2 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 & -14 & 23 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 86 & 0 & -349 & 300 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 9 & -24 & -54 \end{array}\right)$$

Отметим, что ранг матрицы B: $r\left(B\right) = 3$.

► Из последних $n-r=5-3=2$ строк матрицы S составляем матрицу Ψ_1 однородной системы уравнений, описывающей подпространство W:

$$\Psi_1=\begin{pmatrix} 86 & 0 & -349 & 300 & -56 \\ 0 & 86 & 9 & -24 & -54 \end{pmatrix}$$

► Запишем систему уравнений $\Psi_1\cdot X=0$:

$$\begin{pmatrix} 86 & 0 & -349 & 300 & -56 \\ 0 & 86 & 9 & -24 & -54 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 86x_1-349x_3+300x_4-56x_5=0 \\ 86x_2+9x_3-24x_4-54x_5=0 \end{cases}$$

Проверку правильности полученной системы производим подстановкой в неё координат векторов b_1, b_2, b_3:

$$B:=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 9 & -5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \psi_1:=\begin{pmatrix} 86 & 0 & -349 & 300 & -56 \\ 0 & 86 & 9 & -24 & -54 \end{pmatrix} \qquad \psi_1\cdot B\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Составим матрицу $D=(d_1\ d_2\ d_3)$ и блочную матрицу $(D\,|\,E)$:

$$(D\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} -2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & -9 & -12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -28 & -14 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

► Элементарными преобразованиями над строками блочной матрицы и над её первыми трёмя столбцами приведём левый блок к простейшему виду $(\Lambda\,|\,S)$. Для ускорения вычислений получим результат в Mathcad (используем функцию rref):

$$DE:=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & -9 & -12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -28 & -14 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(DE)\to\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{56} & -\frac{1}{28} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{89}{28} & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{28} & -\frac{9}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$(D\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} -2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & -9 & -12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -28 & -14 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 56 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 & -89 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & -23 & 2 \end{array}\right)$$

Отметим, что ранг матрицы D: $r(D)=2$.

► Из последних $n-r=5-2=3$ строк матрицы S составляем матрицу Ψ_2 однородной системы уравнений, описывающей подпространство U:

$$\Psi_2=\begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 & -89 & -2 \\ 0 & 28 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 14 & -23 & 2 \end{pmatrix}$$

► Запишем систему уравнений $\Psi_2 \cdot X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 & -89 & -2 \\ 0 & 28 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 14 & -23 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 28x_1-89x_4-2x_5=0 \\ 28x_2-3x_4-18x_5=0 \\ 14x_3-23x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

Проверку правильности полученной системы производим подстановкой в неё координат векторов d_1, d_2, d_3:

$$D := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -18 & -9 & -12 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -28 & -14 & -19 \end{pmatrix} \qquad \psi_2 := \begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 & -89 & -2 \\ 0 & 28 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 14 & -23 & 2 \end{pmatrix} \qquad \psi_2 \cdot D \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Пересечение $U \cap W$ описывается однородной системой

$$\begin{cases} 86x_1-349x_3+300x_4-56x_5=0 \\ 86x_2+9x_3-24x_4-54x_5=0 \\ 28x_1-89x_4-2x_5=0 \\ 28x_2-3x_4-18x_5=0 \\ 14x_3-23x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

- подпространство $U \cap W$ (внешний способ описания)

Найдём базис пересечения - фундаментальную систему решений этой однородной системы уравнений. Записав матрицу системы, приводим её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 86 & 0 & -349 & 300 & -56 \\ 0 & 86 & 9 & -24 & -54 \\ 28 & 0 & 0 & -89 & -2 \\ 0 & 28 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 14 & -23 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -89/28 & -1/14 \\ 0 & 1 & 0 & -3/28 & -9/14 \\ 0 & 0 & 1 & -23/14 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь базисный минор расположен в первых трёх столбцах, главные неизвестные x_1, x_2, x_3, свободные неизвестные x_4, x_5. Систему, эквивалентную исходной, можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{89}{28}x_4 + \dfrac{1}{14}x_5 \\ x_2 = \dfrac{3}{28}x_4 + \dfrac{9}{14}x_5 \\ x_3 = \dfrac{23}{14}x_4 - \dfrac{1}{7}x_5 \end{cases}$$

Решение запишем в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{89}{28}x_4 + \dfrac{1}{14}x_5 \\ \dfrac{3}{28}x_4 + \dfrac{9}{14}x_5 \\ \dfrac{23}{14}x_4 - \dfrac{1}{7}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} 89/28 \\ 3/28 \\ 23/14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 1/14 \\ 9/14 \\ -1/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x_4}{28} \cdot \begin{pmatrix} 89 \\ 3 \\ 46 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_5}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Полагая свободные переменные равными $x_4 = 28c_1$ и $x_5 = 14c_2$, запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 89 \\ 3 \\ 46 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Итак, фундаментальную систему решений этой системы составляют, например, векторы $\begin{pmatrix} 89 & 3 & 46 & 28 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 & 0 & 14 \end{pmatrix}^T$. Эти векторы и образуют базис в подпространстве $U \cap W$, т.е. $\dim(U \cap W) = 2$.

$$U \cap W = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 89 \\ 3 \\ 46 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}$$ - подпространство $U \bigcap W$ (внутренний способ описания)

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 395, стр. 410 (сумма подпространств), стр. 412 (пересечение подпространств), стр. 405 (пример 8.8), стр. 423 (пример 8.14), стр. 421 (взаимное расположение подпространств);
2) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 146 (пересечение и сумма подпространств), стр. 148 (примеры 4.22, 4.23, 4.24), стр. 133 (правило построения фундаментальной системы решений), стр. 139 (линейная оболочка системы векторов).

б)

Внешнее описание многообразий.

Замечание. Не может одна система уравнений описывать сразу два многообразия. В условии задачи допущена опечатка; следует читать "Для L и M найти задающие их системы линейных уравнений".

Для линейных многообразий L и M найдём задающие их системы линейных уравнений.

Линейное многообразие можно описать одним из двух способов:
- внутренний способ описания (при помощи аффинных оболочек векторов);
- внешний способ описания (при помощи неоднородной системы линейных уравнений).

Для сравнения, линейное подпространство можно описать одним из двух способов:
- внутренний способ описания (при помощи линейных оболочек векторов);
- внешний способ описания (при помощи однородной системы уравнений).

Первоначально имеем задание многообразия L аффинной оболочкой векторов

$$L = Aff\left(a, b_1, b_2, b_3\right), \text{ где } a = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

и задание многообразия M аффинной оболочкой векторов

$$M = Aff\left(c, d_1, d_2, d_3\right), \text{ где } c = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \\ 12 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -18 \\ 4 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 2 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 6 \\ 2 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие действия производятся исходя из того, что линейные многообразия можно задать в форме

$$L = Aff\left(a, b_1, b_2, b_3\right) = a + Lin\left(b_1 - a\ ,\ b_2 - a\ ,\ b_3 - a\right)$$

$$M = Aff\left(c, d_1, d_2, d_3\right) = c + Lin\left(d_1 - c\ ,\ d_2 - c\ ,\ d_3 - c\right)$$

Многообразие L.

1. Определим базис однородной части U линейного многообразия L (выделим линейно независимые векторы из данной совокупности векторов $\left\{b_1, b_2, b_3\right\}$).

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 9 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- базисом однородной части U линейного многообразия L является $\left\{b_1, b_2, b_3\right\}$.

Из столбцов вектора сдвига a и базиса однородной части $\left\{b_1, b_2, b_3\right\}$ составляем матрицу $A = \left(b_1 - a \quad b_2 - a \quad b_3 - a \right)$, затем блочную матрицу

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

которую приводим её к упрощенному виду:

$$AE := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(AE) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{43} & \frac{13}{86} & -\frac{3}{86} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{43} & -\frac{7}{86} & -\frac{5}{86} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{49}{43} & -\frac{16}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{151}{43} & -\frac{103}{86} & \frac{37}{86} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 86 & 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & 13 & -3 \\ 0 & 86 & 0 & 0 & 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 & 49 & -16 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 86 & 0 & 302 & -103 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -12 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Как видим, ранг матрицы A равен $r = \mathrm{rg}A = 3$.

2. Из последних $n - r = 5 - 3 = 2$ строк матрицы S (правая часть матрицы $(A|E)$) составляем матрицу

$$\Psi = \begin{pmatrix} 86 & 0 & 302 & -103 & 37 \\ 0 & 2 & -12 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Записываем искомую систему уравнений в форме $\Psi \cdot X = \Psi \cdot a$:

$$\begin{pmatrix} 86 & 0 & 302 & -103 & 37 \\ 0 & 2 & -12 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 0 & 302 & -103 & 37 \\ 0 & 2 & -12 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 86x_1 + 302x_3 - 103x_4 + 37x_5 = 1333 \\ 2x_2 - 12x_3 + 7x_4 - 3x_5 = -25 \end{cases}$$ - система уравнений, описывающая многообразие L

Многообразие M.

1. Определим базис однородной части W линейного многообразия M (выделим линейно независимые векторы из данной совокупности векторов $\{d_1, d_2, d_3\}$).

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -18 & -9 & -12 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -28 & -14 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- за базис однородной части W линейного многообразия M можно принять $\{d_2, d_3\}$.

Из столбцов вектора сдвига c и базиса однородной части $\{d_2, d_3\}$ составляем матрицу $B = \begin{pmatrix} d_2 - c & d_3 - c \end{pmatrix}$, затем блочную матрицу

$$(B|E) = \left(\begin{array}{cc|ccccc} -14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & -16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

которую приводим её к упрощенному виду:

$$BE := \begin{pmatrix} -14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & -16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(BE) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{106} & \frac{8}{53} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{53} & -\frac{9}{53} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{59}{53} & \frac{40}{53} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{52}{53} & -\frac{11}{53} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{41}{53} & \frac{26}{53} \end{pmatrix}$$

$$(B|E) = \left(\begin{array}{cc|ccccc} -14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & -16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccccc} 106 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 16 \\ 0 & 53 & 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 53 & 0 & 0 & -59 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 0 & 52 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 53 & -41 & 26 \end{array}\right)$$

Как видим, ранг матрицы B равен $r = \mathrm{rg}B = 2$.

3. Из последних $n - r = 5 - 2 = 3$ строк матрицы S (правая часть матрицы $(B|E)$) составляем матрицу

$$\Psi = \begin{pmatrix} 53 & 0 & 0 & -59 & 40 \\ 0 & 53 & 0 & 52 & -11 \\ 0 & 0 & 53 & -41 & 26 \end{pmatrix}$$

4. Записываем искомую систему уравнений в форме $\Psi \cdot X = \Psi \cdot c$:

$$\begin{pmatrix} 53 & 0 & 0 & -59 & 40 \\ 0 & 53 & 0 & 52 & -11 \\ 0 & 0 & 53 & -41 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 0 & 0 & -59 & 40 \\ 0 & 53 & 0 & 52 & -11 \\ 0 & 0 & 53 & -41 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \\ 12 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 53x_1 - 59x_4 + 40x_5 = -613 \\ 53x_2 + 52x_4 - 11x_5 = -323 \\ 53x_3 - 41x_4 + 26x_5 = -258 \end{cases}$$ - система уравнений, описывающая многообразие M

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 419, стр. 423 (пример 8.14).

в)

Пересечение или объединение (композит) линейных многообразий понимается как пересечение или объединение множеств векторов.

Композит многообразий.

Композит многообразий в общем случае также является многообразием, при этом:

1) Базис однородной части композита $L \cup M$ многообразий L и M можно найти как максимальную подсистему линейно независимых столбцов базисов однородных частей U и W этих многообразий. Это сумма подпространств U и W, которая ранее уже была найдена (пункт "а"):

$$U + W = \mathrm{Lin}(b_1, b_2, b_3)$$

2) Вектор сдвига композита многообразий есть сумма векторов сдвига многообразий, т.е.

$$a + c = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \\ 12 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -33 \\ 17 \\ 27 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Итак,

$$L \cup M = \begin{pmatrix} 20 \\ -33 \\ 17 \\ 27 \\ -2 \end{pmatrix} + Lin\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

Пересечение многообразий.

Из систем неоднородных уравнений, описывающих многообразия, составим систему, описывающую пересечение многообразий:

$$\begin{cases} 86x_1 + 302x_3 - 103x_4 + 37x_5 = 1333 \\ 2x_2 - 12x_3 + 7x_4 - 3x_5 = -25 \\ 53x_1 - 59x_4 + 40x_5 = -613 \\ 53x_2 + 52x_4 - 11x_5 = -323 \\ 53x_3 - 41x_4 + 26x_5 = -258 \end{cases}$$

Найдём множество решений этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 86 & 0 & 302 & -103 & 37 & 1333 \\ 0 & 2 & -12 & 7 & -3 & -25 \\ 53 & 0 & 0 & -59 & 40 & -613 \\ 0 & 53 & 0 & 52 & -11 & -323 \\ 0 & 0 & 53 & -41 & 26 & -258 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 9 & 0 & 0 & 0 & -1 & 64 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 5 & -203 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -1 & 73 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -7 & 151 \end{array}\right)$$

Решением является

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}x_5 - \frac{64}{9} \\ -\frac{5}{9}x_5 + \frac{203}{9} \\ \frac{1}{9}x_5 - \frac{73}{9} \\ \frac{7}{9}x_5 + \frac{151}{9} \end{pmatrix} = x_5 \cdot \begin{pmatrix} 1/9 \\ -5/9 \\ 1/9 \\ 7/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -64/9 \\ 203/9 \\ -73/9 \\ 151/9 \end{pmatrix} = \frac{x_5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -64/9 \\ 203/9 \\ -73/9 \\ 151/9 \end{pmatrix}$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Структура этого решения показывает составляющие искомого многообразия.

Итак, пересечение $L \cap M$ многообразий L и M имеет однородную часть с базисом $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T$ и вектор сдвига $\begin{pmatrix} -64/9 & 203/9 & -73/9 & 151/9 \end{pmatrix}^T$. Размерность $\dim(L \cap M) = 1$.

$$L \cap M = \begin{pmatrix} -64/9 \\ 203/9 \\ -73/9 \\ 151/9 \end{pmatrix} + Lin\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 424 (пример 8.15);
2) Босс В. "Лекции по математике. Теория групп", том 8, 2007, стр. 154 (композит полей).

г)

Взаимное расположение многообразий.

Возможны следующие случаи взаимного расположения многообразий:
- многообразия не пересекаются (пересечение множеств пусто), при этом они:
  - а) или параллельны,
  - б) или скрещиваются;
- многообразия пересекаются.

В пункте "в" показано, что пересечение многообразий L и M - непустое множество. Итак, многообразия L и M пересекаются и $L \cap M = \begin{pmatrix} -64/9 \\ 203/9 \\ -73/9 \\ 151/9 \end{pmatrix} + Lin\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$.

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 421 (взаимное расположение многообразий), стр. 425 (пример 8.16).