## Собственные числа и собственные векторы

Для понимания этой темы нужно знать тему «Ядро и образ линейного оператора» и уметь вычислять определители. Значок $\surd$ будет указывать на утверждения, требующие доказательств (это хорошие теоретические задачи для самостоятельного решения).

Линейный оператор, действующий в конечномерном векторном пространстве, может быть описан матрицей, но эта матрица, вообще говоря, зависит от выбора базиса. Возникает вопрос: какие характеристики линейного оператора инвариантны (не зависят от выбора базиса)? Важнейшие из таких характеристик — собственные числа и их кратности. (Полный набор инвариантных характеристик изучается в теме «Жорданова форма».)

Всюду далее предполагается, что $A$ — линейный оператор, действующий в конечномерном векторном пространстве $L$. Обозначим через $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ некоторый базис в $L$ ($\dim L = n$).

Если $Ax = \lambda x$, где $x \in L$ и $x \neq 0$, то говорят, что $\lambda$ — собственное значение (=собственное число=eigenvalue) оператора $A$, а $x$ — собственный вектор, соответствующий (=отвечающий=принадлежащий) собственному значению $\lambda$.

Условие $Ax = \lambda x$ можно переписать в виде $(A - \lambda I)x = 0$, т. е. $x \in \ker(A - \lambda I)$. Выводы:

(1) $\lambda$ — собственное значение $A \iff$ оператор $A - \lambda I$ неинъективен;
(2) $x$ — собственный вектор для с. з. $\lambda \iff x \in \ker(A - \lambda I)$.

Если $\lambda$ — собственное число оператора $A$, то ядро оператора $A - \lambda I$ называют *собственным подпространством* оператора $A$, соответствующим собственному значению $\lambda$. Это подпространство состоит из нуль-вектора и всех собственных векторов оператора $A$, соответствующих $\lambda$.

Пусть теперь $\lambda$ — любое число. Рассмотрим величину $\det(A_e - \lambda E)$. Поскольку определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса $\surd$, то эта величина не зависит от выбора базиса $e$. Кроме того, из определения определителя следует$\surd$, что при фиксированном $A$ эта величина представляет собой многочлен от $\lambda$. Этот многочлен называют *характеристическим многочленом* оператора $A$ и обозначают через $\varphi_A$:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E).$$

Из критерия обратимости конечномерного линейного оператора сразу следует критерий собственного значения.

**Предложение 1 (критерий собственного значения).** *Следующие условия равносильны:*
(a) *оператор* $A - \lambda I$ *необратим;*
(b) $\varphi_A(\lambda) = 0$*;*
(c) $\lambda$ *— собственное значение оператора* $A$*, т. е.* $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$*;*
(d) $r(A - \lambda E) < \dim L$*, где* $r$ *— ранг оператора (размерность образа).*

*Спектр* конечномерного линейного оператора — множество всех его собственных значений. Обозначение: $\sigma(A)$.

*Алгебраическая кратность* собственного числа $\lambda$ — его кратность как корня характеристического многочлена.

*Геометрическая кратность* собственного числа $\lambda$ — размерность его собственного подпространства $\ker(A - \lambda I)$.

Из критерия собственного значения следует, что геометрическая кратность собственного числа строго положительна. Можно доказать $\checkmark$, что геометрическая кратность не превосходит алгебраическую. В частности, отсюда следует, что если алгебраическая кратность равна 1, то геометрическая кратность также равна 1.

**Пример 1.** Найти характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A$, заданного в базисе $e = (e_1, e_2, e_3)$ матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1-й шаг. Найдём характеристический многочлен:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 5 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C^1 + C^2 \\ C^2 + C^1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 5 \\ -1-\lambda & -\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & -1-\lambda & -6 \\ 0 & -1-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & -1-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

Для вычисления определителя были использованы такие строчные и столбцовые преобразования, в результате которых возникают нули и появляются одинаковые линейные многочлены от $\lambda$.

Характеристический многочлен можно найти и другим способом, используя готовые формулы для коэффициентов:

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (M_1^1 + M_2^2 + M_3^3)\lambda^2 - (M_{12}^{12} + M_{13}^{13} + M_{23}^{23})\lambda + M_{123}^{123}.$$

Здесь через $M_{i_1,i_2,\dots}^{j_1,j_2,\dots}$ обозначен минор матрицы $A_e$, находящийся на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots$. Как видим, в формуле участвуют лишь *главные миноры* матрицы $A_e$ (у которых номера столбцов совпадают с номерами строк). Можно доказать$^{\checkmark}$, что в общем виде, коэффициент при $\lambda^k$ равен сумме главных миноров $n-k$-го порядка ($n = \dim L$), умноженной на $(-1)^k$. Минор 0-го порядка считается равным единице.

В нашем примере получаем

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{C^2+2C^1 \\ C^3+C^1}}{=} \begin{vmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$M_{12}^{12} + M_{13}^{13} + M_{23}^{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5 + 3 - 1 = -3,$$

$$M_1^1 + M_2^2 + M_3^3 = 3 + 1 - 4 = 0.$$

Итак,

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda + 2.$$

С помощью схемы Горнера легко найти разложение

$$\varphi_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

Итак, спектр оператора $A$ состоит из двух собственных значений: $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$, причём с. з. $-1$ имеет алгебраическую кратность 2, а с. з. 2 имеет алгебраическую кратность 1.

2-й шаг. Найдём собственные векторы для каждого из собственных значений.

$\underline{\lambda = -1}$. Собственные векторы для $\lambda = -1$ находятся как ненулевые векторы из ядра оператора $A - \lambda I = A + I$. Используем столбцовый метод построения базиса ядра:

$$\left(\frac{E}{A_e + E}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \overset{\substack{C^2+C^1 \\ 2C^3-C^1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных столбцовых преобразований привели нижнюю матрицу к столбцово псевдотреугольному виду. Вектор

$$u_1 = (1, 1, 0)^T,$$

стоящий над нулевым столбцом нижней матрицы, образует базис ядра оператора $A + I$, а следовательно, базис собственного подпространства оператора $A$, отвечающего собственному числу $-1$. Общий вид собственных векторов для $\lambda = -1$:

$$u = Cu_1, \qquad \text{где} \qquad C \neq 0.$$

Геометрическая кратность с. з. $-1$ равна 1.

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{т. е.} \qquad Au_1 = -u_1.$$

Для полноты проверки следует ещё доказать, что других собственных векторов (линейно независимых с $u_1$) нет, т. е. что $\dim\ker(A + I) \leqslant 1$. Поскольку $\dim\ker(A + I) + \dim\operatorname{im}(A + I) = \dim L = 3$, то неравенство $\dim\ker(A + I) \leqslant 1$ равносильно неравенству $r(A_e + E) \geqslant 2$ ($r$ — ранг), которое очевидно: второй и третий столбцы матрицы $A_e + E$ не пропорциональны первому.

$\underline{\lambda = 2}$. Находим базис ядра $A - 2I$ столбцовым способом:

$$\left(\frac{E}{A_e - 2E}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} C^2 + C^1 \\ C^3 - 2C^1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C^3 + C^2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вектор

$$u_2 = (-1, 1, 1)^T$$

образует базис $\ker(A-2I)$. Поэтому собственные векторы, соответствующие собственному числу 2, имеют вид

$$x = Cu_2, \qquad \text{где} \qquad C \neq 0.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т. е. $Au_2 = 2u_2$. Поскольку алгебраическая кратность равна 1, то сомнений насчёт геометрической кратности быть не должно.

Ответ:

$$\lambda = -1\colon\, u_1 = (1,1,0)^T;$$
$$\lambda = 2\colon\, u_2 = (-1,1,1)^T.$$

### Операторы простой структуры

Пусть $A$ — линейный оператор в пространстве $L$, $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ — базис в $L$. Из определения матрицы оператора сразу вытекает равносильность следующих условий:
(a) базис $u$ состоит из собственных векторов оператора $A$;
(b) матрица $A_u$ диагональна.

Более подробно:

$$Au_j = \lambda_j u_j \ (j = 1, \dots, n) \iff A_u = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Здесь, как обычно, символ diag применяется для обозначения диагональной матрицы.

Линейный оператор $A$ называют *оператором простой структуры*, если в пространстве $L$ существует базис из собственных векторов оператора $A$.

Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы$^{\checkmark}$. Поэтому базис из собственных векторов существует $\iff$ характеристический многочлен разлагается на линейные множители и для каждого собственного числа алгебраическая кратность равна геометрической$^{\checkmark}$.

Заметим, что оператор из примера 1 не является оператором простой структуры, так как для с. з. $-1$ геометрическая кратность не совпадает с алгебраической (поэтому линейно независимых собственных векторов получается меньше, чем размерность пространства).

**Пример 2.** Найти собственные числа и собственные векторы оператора $A$, а также проверить, является ли он оператором простой структуры.

$$A_e = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 8 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Первый шаг. Найдём $\varphi_A$ и $\operatorname{Sp}(A)$.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -8 & 4 \\ 8 & -7-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 8 & -7-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C^2 + C^1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 1-\lambda & 4 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Итак, $\varphi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.

Другой способ:

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (9-7+3)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\right)\lambda +$$

$$+\begin{vmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 8 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Второй шаг. Находим собственные векторы.

<u>$\lambda = 1$</u>:

$$\left(\frac{E}{A_e - E}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 8 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{C^1 - 2C^3 \\ C^2 + 2C^3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нашли два линейно независимых собственных вектора:

$$u_1 = (1, 0, -2)^T, \qquad u_2 = (0, 1, 2)^T.$$

Векторы $u_1$ и $u_2$ образуют базис в $\ker(A - I)$, поэтому общий вид собственных векторов для $\lambda = 1$ следующий:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2, \qquad \text{где} \qquad C_1 \neq 0 \text{ или } C_2 \neq 0.$$

<u>$\lambda = 3$</u>:

$$\left(\frac{E}{A_e - 3E}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 6 & -8 & 4 \\ 8 & -10 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C^2 + C^1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 6 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C^3 + 2C^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 6 & -2 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис $\ker(A-3I)$ состоит из одного вектора:

$$u_3 = (2,2,1)^T.$$

Общий вид собственных векторов для $\lambda = 3$:

$$u = C_3 u_3, \qquad \text{где} \qquad C_3 \neq 0.$$

Третий шаг. Характеристический многочлен разложился на линейные множители, геометрические кратности совпали с алгебраическими, поэтому $A$ — оператор простой структуры. Собственные векторы $u_1, u_2, u_3$ образуют базис. С помощью соотношений

$$Au_1 = u_1, \qquad Au_2 = u_2, \qquad Au_3 = 3u_3$$

строим матрицу оператора $A$ в базисе $u$. Она имеет диагональный вид:

$$A_u = \operatorname{diag}(1,1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Запишем $P_{e\to u}$:

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$P_{u\to e}$ находится как обратная матрица к $P_{e\to u}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{C_3 + 2C_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{C_3 - 2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1 - 2C_3 \\ C_2 - 2C_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Далее вычислим $A_u = P_{u\to e} A_e P_{e\to u}$:

$$A_u = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 8 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка показала правильность решения.

Вместо равенства $A_u = P_{e\to u}^{-1} A_e P_{e\to u}$ удобнее проверять равенство

$$A_e P_{e\to u} = P_{e\to u} A_u.$$

Учитывая диагональность матрицы $A_u$ и правила умножения матриц, можно сообразить, что это просто краткая запись системы

$$A_e (u_j)_e = \lambda_j (u_j)_e \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где $\lambda_j$ — диагональные элементы $A_u$.

**Пример 3 (образец оформления).**

$$A_e = \begin{pmatrix} -5 & 18 & 6 \\ -2 & 5 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём характеристический многочлен и спектр:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 18 & 6 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ -2 & 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1 - 3C_2 \\ C_3 - C_2}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3+3\lambda & -6 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 2+\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C^2 + C^3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3\lambda-3 & -6 \\ -2 & 9-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{C^2 + 3C^1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -6 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1, 3\}$.

Поскольку алгебраические кратности равны 1, то все геометрические кратности также равны 1 и оператор имеет простую структуру.

Теперь для каждого с. з. найдём с. в.

$\underline{\lambda = -2}$. Построим базис в $A + 2I$ столбцовым способом:

$$\left(\frac{E}{A_e + 2E}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 18 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{C^2 + 6C^1 \\ C^2 + C^1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$u_1 = (2, 0, 1)^T.$$

$\underline{\lambda = 1}$. Построим базис в $\ker(A - I)$ строчным способом:

$$A_e - I = \begin{pmatrix} -6 & 18 & 6 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_1/(-6) \\ C_2/(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 + 2C_1}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_1 + 3C_2 \\ C_3 - C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

$$u_2 = (4, 1, 1)^T.$$

$\underline{\lambda = 3}$. Построим базис в $\ker(A - 3I)$ строчным способом:

$$A_e - 3E = \begin{pmatrix} -8 & 18 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_1 - 4C_2 \\ C_3 - C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{\substack{C_1/10 \\ C_2/(-2) \\ C_3/5}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_2 + C_1 \\ C_3 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

$$u_3^T = (3, 1, 1)^T.$$

В базисе $u_1, u_2, u_3$ матрица оператора диагональна:

$$A_u = \operatorname{diag}(-2, 1, 3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверим, выполняется ли соотношение $A_e P_{e\to u} = P_{e\to u} A_u$:

$$A_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -5 & 18 & 6 \\ -2 & 5 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P_{e\to u} A_u = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Примеры операторов, не имеющих простую структуру

Оператор может не иметь простую структуру в следующих случаях: 1) в данном поле характеристический многочлен не раскладывается на неприводимые множители; 2) хотя бы для одного собственного числа геометрическая кратность строго меньше алгебраической. Конечно, условия 1) и 2) могут выполняться и одновременно.

Сначала приведём классический пример, когда оператор вовсе не имеет собственных векторов. Это значит, что оператор *поворачивает* каждый вектор.

**Пример 4 (оператор поворота плоскости).** Пусть $V^2(O)$ — действительное пространство радиус-векторов плоскости с началом $O$ (сложение определяется правилом параллелограмма). Обозначим через $A$ оператор поворота на фиксированный угол $\varphi$, где $\varphi$ не кратен $\pi$.

В правом ортонормированном базисе $e_1$, $e_2$ матрица оператора будет следующей:
$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:
$$\varphi_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi.$$
Угол $\varphi$ не кратен $\pi$, поэтому $\sin\varphi \neq 0$, и характеристический многочлен не имеет действительных корней. Собственных чисел и собственных векторов нет.

**Пример 5 (оператор поворота пространства).** В трёхмерном действительном пространстве $V^3(O)$ с правым ортонормированным базисом $e_1, e_2, e_3$ рассмотрим оператор поворота относительно оси вектора $e_3$ на угол $\varphi$. Этот оператор имеет матрицу
$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Легко видеть, что единственное с. з. — $\lambda = 1$, имеющее алгебраическую (и геометрическую) кратность 1. Этому с. з. соответствует собственный вектор $e_3$.

**Пример 6 (оператор перекоса)** В двумерном пространстве с базисом $e_1, e_2$ рассмотрим оператор $A$, заданный на базисе следующими формулами:
$$Ae_1 = e_1, \qquad Ae_2 = e_1 + e_2.$$

По определению матрицы оператора,

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2.$$

Единственное с. з. — $\lambda = 1$ (алгебраическая кратность равна 2). Находим собственные векторы:

$$\left( \frac{E}{A_e - E} \right) = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

Нижняя матрица уже имеет столбцово псевдодигональный вид. Над нулевым столбцом находится вектор $(1, 0)^T$ — координатный столбец вектора $e_1$. Итак, для $\lambda = 1$ имеется лишь один с. в.: $u = e_1$ (геометрическая кратность равна 1). Оператор не имеет простую структуру.