

1) Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу самосопряжённого оператора A в этом базисе, если в исходном ортонормированном базисе оператор A имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -11 & 10 & -2 \\ 10 & -14 & -8 \\ -2 & -8 & -20 \end{pmatrix}$$

Линейное преобразование $A: E \rightarrow E$ n -мерного евклидова пространства E называется **самосопряжённым**, если оно является сопряжённым самому себе, а именно $A^* = A$, т.е. $(A(x), y) = (x, A(y))$ для любых векторов x и y из пространства E .

Матрица A самосопряжённого преобразования в любом ортонормированном базисе является симметрической ($A^T = A$), и наоборот, если в каком-либо ортонормированном базисе матрица преобразования симметрическая, то это преобразование самосопряжённое.

► Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -11-\lambda & 10 & -2 \\ 10 & -14-\lambda & -8 \\ -2 & -8 & -20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \cdot (\lambda + 27) \cdot (\lambda + 18) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -27$$

$$\lambda_3 = -18$$

Составляем диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

- матрица линейного оператора A в базисе, состоящем из собственных векторов.

Далее найдём собственные векторы матрицы A ; в случае самосопряжённого оператора они ортогональны, так что останется только их нормировать - и получим ортонормированный базис из собственных векторов.

► Находим ФСР, соответствующие λ_i .

$$\lambda_1 = 0:$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -11-0 & 10 & -2 \\ 10 & -14-0 & -8 \\ -2 & -8 & -20-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & -10 & 2 \\ 5 & -7 & -4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 5 & -7 & -4 \\ 11 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 27 & 54 \\ 0 & 54 & 108 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Phi_{CP}: F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -27$:

$$\begin{pmatrix} -11 - (-27) & 10 & -2 \\ 10 & -14 - (-27) & -8 \\ -2 & -8 & -20 - (-27) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 16 & 10 & -2 \\ 10 & 13 & -8 \\ 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 10 & 13 & -8 \\ 16 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 0 & 27 & -27 \\ 0 & 54 & -54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Phi_{CP}: F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_3 = -18$:

$$\begin{pmatrix} -11 - (-18) & 10 & -2 \\ 10 & -14 - (-18) & -8 \\ -2 & -8 & -20 - (-18) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 10 & -2 \\ 10 & 4 & -8 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 10 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 7 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$X_3 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ФСР: } F_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица имеет вид:

$$F = (F_1 \ F_2 \ F_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Отметим, что векторы, составляющие матрицу, попарно ортогональны.

Собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям самосопряжённого преобразования, ортогональны.

Нормируем столбцы фундаментальной матрицы.

$$F = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Запишем искомый ортонормированный базис, в котором матрица оператора A состоит из собственных векторов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Литература:

- 1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 523 (свойства самосопряжённого преобразования), стр. 527 (пример 9.6);
- 2) Овсянников А.Я. "Линейная алгебра", 1997, стр. 211 (пример).