

Правильные рациональные дроби вида

$$\frac{A}{x-a} \quad (I)$$

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2 \quad (II)$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad p^2-4q < 0 \quad (III)$$

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2 \quad (IV)$$

где $\{A, M, N, a, p, q\} \subset \mathbb{R}$, называются **простейшими рациональными дробями** I, II, III и IV типов.

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(x+7)^3};$

б) $\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68} dx;$

в) $\int \frac{dx}{(4x^2+12x+10)^2};$

г) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

а)

$$\int \frac{dx}{(x+7)^3} = \int \frac{d(x+7)}{(x+7)^3} = -\frac{1}{2 \cdot (x+7)^2} + C$$

- использован приём подведения под знак дифференциала.

б)

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+11}{x^2-16x+68} dx &= \int \frac{3x+11}{(x^2-2 \cdot x \cdot 8+8^2)+4} dx = \int \frac{3x+11}{(x-8)^2+4} dx = \left[\begin{matrix} x-8=t \\ dx=dt \end{matrix} \right] = \\ &= \int \frac{3t+35}{t^2+4} dt = 3 \cdot \int \frac{t dt}{t^2+4} + 35 \cdot \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + 35 \cdot \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \ln|t^2+4| + \frac{35}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{3}{2} \cdot \ln((x-8)^2+4) + \frac{35}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x-8}{2}\right) + C = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2-16x+68) + \frac{35}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x-8}{2}\right) + C \end{aligned}$$

- в знаменателе алгебраической дроби выделен полный квадрат и сделана замена переменной.

в)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(4x^2+12x+10)^2} = \int \frac{dx}{((2x+3)^2+1)^2} = \left[\begin{matrix} 2x+3=t \\ 2dx=dt \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+1)} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt \end{aligned}$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt = \left[\begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = \frac{t dt}{(t^2+1)^2} \\ v = -\frac{1}{2(t^2+1)} \end{array} \right] = uv - \int v du = -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+1)} = -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t$$

И окончательно

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+1)} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + \frac{t}{4(t^2+1)} - \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} t + \frac{t}{4(t^2+1)} + C = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg}(2x+3) + \frac{t}{4((2x+3)^2+1)} + C = \frac{1}{4} \cdot \left(\operatorname{arctg}(2x+3) + \frac{2x+3}{(4x^2+12x+10)} \right) + C \end{aligned}$$

- выделен полный квадрат и сделана подходящая замена переменной; далее применено интегрирование по частям.

г)

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

В данном случае целесообразно найти интеграл [методом Остроградского](#).

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int \left(\frac{Ex+F}{x^2+1} \right) dx$$

Поскольку подинтегральная функция чётная, то $B = D = E = 0$, и разложение интеграла можно упростить:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax^3+Cx}{(x^2+1)^2} + \int \left(\frac{F}{x^2+1} \right) dx$$

Дифференцируем равенство и приводим к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)^3} &\equiv \frac{(3Ax^2+C) \cdot (x^2+1)^2 - (Ax^3+Cx) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} + \frac{F}{x^2+1} \\ \frac{1}{(x^2+1)^3} &\equiv \frac{(3Ax^2+C) \cdot (x^2+1) - (Ax^3+Cx) \cdot 4x}{(x^2+1)^3} + \frac{F}{x^2+1} \\ \frac{1}{(x^2+1)^3} &\equiv \frac{(3Ax^2+C) \cdot (x^2+1) - (Ax^3+Cx) \cdot 4x + F \cdot (x^2+1)^2}{(x^2+1)^3} \\ \frac{1}{(x^2+1)^3} &\equiv \frac{x^4 \cdot (-A+F) + x^2 \cdot (3A-3C+2F) + (C+F)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -A+F=0 \\ 3A-3C+2F=0 \\ C+F=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3/8 \\ C=5/8 \\ F=3/8 \end{cases}$$

И тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3x^3+5x}{8 \cdot (x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x \cdot (3x^2+5)}{8 \cdot (x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \arctg x + C$$

Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 244;
- 2) Орловский Д.Г. "Неопределённый интеграл", 2006, стр. 86 (интеграл 1817) - к примеру "1в";
- 3) Орловский Д.Г. "Неопределённый интеграл", 2006, стр. 154 (интеграл 1893) - к примеру "1г".

Интегрирование рациональных дробей.

Общее правило интегрирования рациональных дробей:

1. Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить её в виде суммы простейших рациональных дробей.
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

2) Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx;$

б) $\int \frac{3x+18}{x^3-6x^2+18x} dx;$

в) $\int \frac{x^3+1}{x-1} dx;$

г) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x} dx;$

а)

1-й способ решения

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx$$

Разложим правильную рациональную алгебраическую дробь на сумму простейших дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{2x-3}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A \cdot (x+2) + B \cdot (x-2)}{x^2-4} = \frac{x \cdot (A+B) + (2A-2B)}{x^2-4}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-2B=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ B=7/4 \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x^2-4} dx &= \frac{1}{4} \cdot \left(\int \frac{dx}{x-2} + 7 \cdot \int \frac{dx}{x+2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\int \frac{d(x-2)}{x-2} + 7 \cdot \int \frac{d(x+2)}{x+2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\ln|x-2| + 7 \cdot \ln|x+2|) + C \end{aligned}$$

2-й способ решения

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x-3}{x^2-4} dx &= \int \frac{2x}{x^2-4} dx - 3 \cdot \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} + 3 \cdot \int \frac{dx}{2^2-x^2} = \\
 &= \ln|x^2-4| + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + C = \ln|x-2| + \ln|x+2| + \frac{3}{4} \cdot \ln|2+x| - \frac{3}{4} \cdot \ln|2-x| + C = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \ln|2-x| + \frac{7}{4} \cdot \ln|2+x| + C
 \end{aligned}$$

б)

$$\int \frac{3x+18}{x^3-6x^2+18x} dx$$

Разложим правильную рациональную алгебраическую дробь на сумму простейших дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 \frac{3x+18}{x^3-6x^2+18x} &= \frac{3x+18}{x \cdot (x^2-6x+18)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+18} = \frac{A \cdot (x^2-6x+18) + (Bx+C) \cdot x}{x \cdot (x^2-6x+18)} = \\
 &= \frac{x^2 \cdot (A+B) + x \cdot (-6A+C) + 18A}{x \cdot (x^2-6x+18)} \\
 \begin{cases} A+B=0 \\ -6A+C=3 \\ 18A=18 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x+18}{x^3-6x^2+18x} dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-x+9}{x^2-6x+18} dx = \ln|x| + \int \frac{-x+9}{(x-3)^2+9} dx = \left[\begin{array}{l} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{array} \right] = \\
 &= \ln|x| + \int \frac{-t+6}{t^2+9} dt = \ln|x| - \int \frac{t dt}{t^2+9} + 6 \cdot \int \frac{dt}{t^2+9} = \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + 6 \cdot \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+9| + 6 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} + C = \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|(x-3)^2+9| + 6 \cdot \frac{1}{3} \arctg \left(\frac{x-3}{3} \right) + C = \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2-6x+18| + 2 \arctg \left(\frac{x-3}{3} \right) + C = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+18}} \right| + 2 \arctg \left(\frac{x-3}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

Разложение алгебраической дроби на сумму простейших дробей и вычисление интеграла в Mathcad 14:

$$\begin{aligned}
 \frac{3x+18}{x^3-6x^2+18x} &\text{ parfrac } \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{x-9}{x^2-6x+18} \\
 \int \frac{3x+18}{x^3-6x^2+18x} dx &\rightarrow 2 \cdot \text{atan} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) - \frac{\ln[(x-3)^2+9]}{2} + \ln(x)
 \end{aligned}$$

в)

$$\int \frac{x^3+1}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + 2 \cdot \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \cdot \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \cdot \ln|x-1| + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1)^2 + C$$

г)

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx$$

Выделим целую часть неправильной рациональной алгебраической дроби:

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} = \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{x^3 - 7x^2 + 12x} = 1 + \frac{4x^2 - 12x - 12}{x^3 - 7x^2 + 12x} = 1 + \frac{4x^2 - 12x - 12}{(x-4)(x-3)x}$$

Разложим правильную рациональную алгебраическую дробь на сумму простейших дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{4x^2 - 12x - 12}{(x-4)(x-3)x} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x} = \frac{Ax(x-3) + Bx(x-4) + C(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)x} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(-3A-4B-7C) + 12C}{(x-4)(x-3)x}$$

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ 3A+4B+7C=12 \\ 12C=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=4 \\ C=-1 \end{cases}$$

Так что

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-4} + \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x} \right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x-4} + 4 \cdot \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x} =$$

$$= \int dx + \int \frac{d(x-4)}{x-4} + 4 \cdot \int \frac{d(x-3)}{x-3} - \int \frac{dx}{x} = x + \ln|x-4| + 4 \cdot \ln|x-3| - \ln|x| + C =$$

$$= x + \ln \left| \frac{(x-4)(x-3)^4}{x} \right| + C$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 246.

Интегрирование иррациональных функций.

3) Найти интегралы:

а) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx;$

б) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3} dx;$

в) $\int \sqrt{10+2x-x^2} dx;$

г) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}} dx.$

а)

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx &= \int \frac{3x+4}{\sqrt{(x+3)^2+4}} dx = \left[\begin{array}{l} x+3=t \\ dx=dt \end{array} \right] = \int \frac{3t-5}{\sqrt{t^2+4}} dt = 3 \cdot \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2+4}} - 5 \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \\
&= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+4)}{\sqrt{t^2+4}} - 5 \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(t^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} - 5 \cdot \ln \left| t + \sqrt{t^2+4} \right| + C = \\
&= 3 \cdot \sqrt{t^2+4} - 5 \cdot \ln \left| t + \sqrt{t^2+4} \right| + C = 3 \cdot \sqrt{(x+3)^2+4} - 5 \cdot \ln \left| (x+3) + \sqrt{(x+3)^2+4} \right| + C = \\
&= 3 \cdot \sqrt{x^2+6x+13} - 5 \cdot \ln \left| x+3 + \sqrt{x^2+6x+13} \right| + C
\end{aligned}$$

- под корнем выделен полный квадрат и сделана замена переменной.

б)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3} dx &= \left[\begin{array}{l} x=4 \operatorname{tg} t \\ dx=\frac{4dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{4 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}{4^3 \operatorname{tg}^3 t} \cdot \frac{4dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{4 \sin^3 t} = \\
&= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \sin^3 t = \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right] = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}} dt}{t^3} = \left[\begin{array}{l} 1+t^2 = u^2 \\ t dt = u du \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{u^4 du}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \int \left(1 + \frac{3}{u-1} - \frac{3}{u+1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} \right) du = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(u + 3 \ln |u-1| - 3 \ln |u+1| - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) + C = \frac{3}{4} \cdot \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{u \cdot (u^2-3)}{4 \cdot (u^2-1)} + C
\end{aligned}$$

- применена тригонометрическая подстановка, сделана замена, выделена целая часть неправильной рациональной алгебраической дроби (многочлен на многочлен делим столбиком), правильная дробь разложена на сумму простейших дробей методом неопределённых коэффициентов.

в)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{10+2x-x^2} dx &= \int \sqrt{11-(x-1)^2} dx = \left[\begin{array}{l} x-1 = \sqrt{11} \sin t \\ dx = \sqrt{11} \cos t dt \\ \cos t = \frac{10+2x-x^2}{11} \geq 0 \end{array} \right] = \int \sqrt{11-11 \sin^2 t} \cdot \sqrt{11} \cos t dt = \\
&= 11 \cdot \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = 11 \cdot \int \cos^2 t dt = \frac{11}{2} \cdot \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{11}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\
&= \frac{11}{2} \cdot (t + \sin t \cdot \cos t) + C = \frac{11}{2} \cdot \left(\arcsin \left(\frac{x-1}{\sqrt{11}} \right) + \left(\frac{x-1}{\sqrt{11}} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{11}} \right) + C = \\
&= \frac{11}{2} \arcsin \left(\frac{x-1}{\sqrt{11}} \right) + \left(\frac{x-1}{2} \right) \cdot \sqrt{10+2x-x^2} + C
\end{aligned}$$

- выделили полный квадрат и сделали подходящую подстановку с учётом области определения подкоренного выражения $|x - 1| \leq 11$.

г)

$$\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}} dx = \int x^{-\frac{19}{10}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{5}} dx$$

- интеграл от дифференциального бинома $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$, где

$$m = -\frac{19}{10}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{4}{5}, \quad a = 1, \quad b = 1.$$

Поскольку $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{19}{10} + 1}{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5} = -1 \in \mathbb{Z}$, то применим подстановку вида $a + bx^n = x^n t^s$, где s - знаменатель дроби p .

В данном случае подстановка имеет вид $1 + \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot t^5$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}} dx &= \int x^{-\frac{19}{10}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{5}} dx = \left[\begin{array}{l} 1 + \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot t^5 \\ x^{\frac{1}{2}} + 1 = t^5 \\ -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx = 5t^4 dt \\ dx = -10t^4 x^{\frac{3}{2}} dt \end{array} \right] = -10 \cdot \int x^{-\frac{19}{5}} \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot t^4 \cdot t^4 \cdot x^{\frac{3}{2}} dt = \\ &= -10 \cdot \int t^8 dt = -10 \cdot \frac{t^9}{9} + C = -\frac{10}{9} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{9}{5}} + C = -\frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{9}{5}} + C = -\frac{10}{9} \cdot \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt{x})^9}}{\sqrt[10]{x^9}} + C \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (действительные числа), $m, n, p \in \mathbb{Q}$ (рациональные числа), называемые **интегралами от дифференциального бинома**, как показал Чебышев П.А., можно вычислить в элементарных функциях лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел p , $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если p - целое число, то подстановка $x = t^k$, где k - наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n ;

2) если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, то подстановка $a + bx^n = t^s$, где s - знаменатель дроби p ;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ - целое число, то подстановка $a + bx^n = x^n t^s$, где s - знаменатель дроби p .

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ не выражаются через известные элементарные функции, т.е. "не берутся".

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 251.

Изученные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределённый интеграл, т.е. найти первообразную функции для подинтегральной функции.

На практике при вычислении неопределённых интегралов используют различные справочники, содержащие таблицы особенно часто встречающихся интегралов (Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. "Таблицы неопределённых интегралов"; Двайт Г.Б. "Таблицы интегралов и другие математические формулы"...), или используют как справочник вычислительные математические программы (Mathcad, Maple, Mathematica, Maxima...).

Как известно, **всякая непрерывная функция имеет первообразную**. В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что $\int f(x) dx$ "берётся", т.е. интеграл выражается через элементарные функции (или интеграл вычисляется). **Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл "не берётся"** (или "его найти нельзя").

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x} \cdot \cos(x) dx$, т.к. не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x} \cdot \cos(x)$. Приведём ещё примеры неберущихся интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \sin(x^2) dx$, $\int \cos(x^2) dx$ - интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x} dx$ - интегральная показательная функция.

Первообразные от функций e^{-x^2} , $\cos(x^2)$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента x .

В справочной системе Mathcad в разделе "Special Functions and Syntax Used in Symbolic Results" перечислены интегральные функции, используемые в среде Mathcad; интегральные функции "знает" только символьный процессор Mathcad. В численных расчётах использовать их нельзя (см. лит. [2]).

$$\begin{array}{ll} \int \frac{\sin(x)}{x} dx \rightarrow \text{Si}(x) & \int \frac{\cos(x)}{x} dx \rightarrow \text{Ci}(x) \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx \rightarrow \text{erf}(x) & \int \frac{e^x}{x} dx \rightarrow -\text{Ei}(1, -x) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \sin(x^2) dx \rightarrow \text{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x\right) & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \cos(x^2) dx \rightarrow \text{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x\right) \end{array}$$

Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 256;
- 2) Гурский Д.А., Турбина Е.А. "Mathcad для студентов и школьников", 2005, страницы 256...259 (интегральные функции).