

1) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Данный ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

имеет область сходимости $|x| \leq 1$ и, как любой степенной ряд внутри интервала сходимости, имеет производную

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)}$$

Используем известное разложение в ряд Маклорена функции $\ln(1-x)$ (здесь нет модуля, просто скобки, т.к. $|x| \leq 1$), получаем:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \ln(1-x)$$

Следовательно

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)} = \left[\begin{matrix} n+1=k \\ n=k-1 \end{matrix} \right] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{x^2 \cdot k} = \frac{1}{x^2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{1}{x^2} \cdot (-x - \ln(1-x))$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2} \cdot (-x - \ln(1-x)) dx = -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx$$

$$\int \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx = \left[\begin{matrix} u = \ln(1-x) \\ du = -\frac{1}{1-x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} \\ v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right] = uv - \int v du = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1-x)} dx =$$

$$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \ln|x| + \ln|x-1|$$

$$f(x) = -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx = -\ln|x| + \frac{\ln(1-x)}{x} + \ln|x| - \ln|x-1| + C =$$

$$= \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln|x-1| + C = \left[\text{поскольку } |x| \leq 1 \right] = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + C$$

Постоянную C определим из условия:

при $x \rightarrow 0$: $\Sigma \rightarrow 0$

$$\text{при } x \rightarrow 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + C = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1-x)} - 0 + C = -1 + C$$

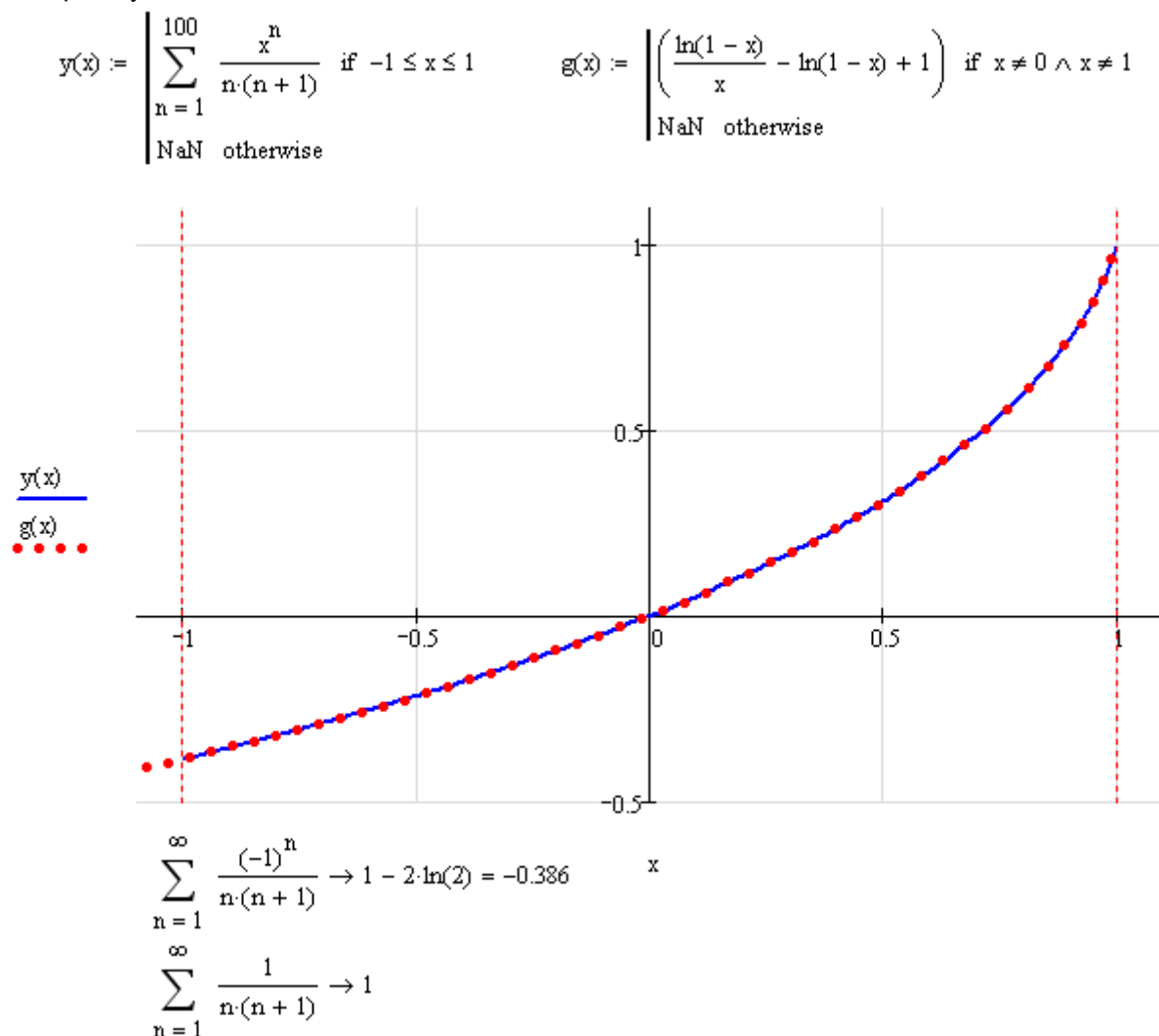
- следовательно $C = 1$ и

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1$$

Отметим, что полученное выражение имеет область определения меньшую, чем исходный ряд ($|x| \leq 1$), т.к. здесь $x \neq 0$, $x \neq 1$. Поэтому окончательно запишем

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1, & \text{при } x \neq 0, x \neq 1 \\ 0, & \text{при } x = 0 \\ 1, & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

Сделаем картинку в Mathcad:



Литература:

- 1) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. "Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента", том 2, 2003, стр. 97 (задача 226);
- 2) Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. "Таблицы неопределённых интегралов", 2003, стр. 185.

2) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n-1}$$

Данный ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n-1}$$

имеет область сходимости $|x| < 1$ и, как любой степенной ряд внутри интервала сходимости, может быть проинтегрирован

$$\int f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -2 \cdot \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Второе слагаемое проинтегрируем ещё раз, и получим

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = \left[\begin{matrix} n+1=k \\ n=k-1 \end{matrix} \right] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -x - \ln(1-x)$$

и, дифференцируя, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (-x - \ln(1-x))' = -1 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Следовательно

$$\int f(x) dx = -2 \cdot \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = -2 \cdot \ln(1-x) + \frac{x}{1-x} + C$$

Продифференцировав полученное выражение, получим сумму исходного ряда:

$$f(x) = \left(-2 \cdot \ln(1-x) + \frac{x}{1-x} + C \right)' = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3-2x}{(1-x)^2}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^2}$$

Сделаем картинку в Mathcad:

