Признаки сравнения знакоположительных рядов.

Первый признак сравнения.

Пусть имеются два положительных ряда $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём члены первого, начиная с некоторого места, не превосходят соответствующих членов второго:
$a_n \le b_n ,\quad n = m+1, m+2, \dots \quad (m \ge 0 ,\ m \in Z)$. Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.

Второй признак сравнения. (предельный признак сравнения)

Пусть имеются два строго положительных ряда $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\left(\forall n \in N :\ a_n > 0,\ b_n > 0\right)$. Пусть существует конечный, отличный от нуля, предел

$$\boldsymbol{l} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \qquad (\boldsymbol{l} \ne 0,\ \boldsymbol{l} \ne \infty).$$

Тогда ряды A и B сходятся или расходятся одновременно.

Третий признак сравнения.

Пусть имеются два строго положительных ряда $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\left(\forall n \in N :\ a_n > 0,\ b_n > 0\right)$.
Пусть, начиная с некоторого места, т.е. для $n \ge m$ $(m \in N)$ оказывается

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.

Замечание. При использовании признаков сравнения всё зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов. Для успешного применения признаков сравнения необходим арсенал эталонных рядов, как сходящихся, так и расходящихся, с которыми затем сравниваются исследуемые ряды.

Признаки сходимости знакоположительных рядов.

Признак Коши (радикальный признак Коши),
интегральный признак Коши,
признак Куммера.

Из признака Куммера, как частные случаи, получаются следующие признаки:

признак Даламбера,
признак Раабе,
признак Бертрана,
признак Гаусса,
признак Жамэ.

Следует отметить, что эта цепочка всё более и более тонких признаков может быть продолжена.

1) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1} \qquad (1)$$

Заметим, что множитель $2+\cos n\pi$ принимает значения 1 или 3; поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$$

Опираясь на первый признак сравнения знакоположительных рядов, можно перейти к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1} \qquad (2)$$

Используем второй (предельный) признак сравнения. В качестве эталонного возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Вычислим предел

$$\boldsymbol{l}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n^2-1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2-0=2$$

Предел $\boldsymbol{l}=2$ имеет конечное значение, следовательно, ряд (2) также расходится. Соответственно, расходится и ряд (1).

Литература:

1) Аксёнов А.П. "Математика", часть 2, 2005, стр. 251;
2) Воробьёв Н.Н. "Теория рядов", 2002, стр. 50;
3) Письменный Д.Т."Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 444.

2) Используя один из признаков сравнения, исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$$

Возьмём в качестве эталонного гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Применим второй (предельный) признак сравнения:

$$\boldsymbol{l}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n}{4n^3+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}}=\frac{1+0}{4+0}=\frac{1}{4}$$

Предел отношения n-х членов рядов при $n\to\infty$ равен конечному числу, следовательно, исследуемый ряд также расходится.

3) Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$, и выясним его сходимость. Он сходится по признаку Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Далее применим второй (предельный) признак сравнения знакопостоянных рядов; для этого исследуем отношение

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \begin{bmatrix}\frac{\pi}{2^n} = t \\ n\to\infty:\ t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

Поскольку существует конечный, отличный от нуля, предел, то исходный ряд также сходится.

4) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\cdot\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\cdot\sqrt{3}+1\right)}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\cdot\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\cdot\sqrt{3}+1\right)} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\cdot\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\cdot\sqrt{2}+1\right)}$$

К видоизменённому ряду применим интегральный признак Коши-Маклорена:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(x\sqrt{2}+1\right)} = \begin{bmatrix}x\sqrt{2}+1 = t \\ \sqrt{2}\ dx = dt\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_{1+\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dt}{t\cdot\ln^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_{1+\sqrt{2}}^{\infty}\frac{d(\ln t)}{\ln^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\ln t}\right)\Bigg|_{1+\sqrt{2}}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Поскольку интеграл сходится, то, с учётом первого признака сравнения, и исходный ряд сходится.

Литература:

1) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. "Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента", том 2, 2003, стр. 43 (пример 43).

5) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}}-1\right)$$

При $n\to\infty$: $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n^3}\to 0$, поэтому применим формулу Маклорена $e^x-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, и получим

$$a_n=e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}}-1=\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}+o\left(\frac{\sqrt{n}}{n^3}\right)=O\left(\frac{\sqrt{n}}{n^3}\right),$$

где

$o(\ )$ - символ Ландау "о малое", обозначающий, что величина $o\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^3}\right)$ является величиной бесконечно малой высшего порядка по сравнению с величиной $\dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$ (при $n\to\infty$);

$O(\ )$ - символ Ландау "О большое", обозначающий, что величина $\dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$ является величиной бесконечно малой (или бесконечно большой) **одного порядка** с величиной $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n^3}+o\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^3}\right)$ (при $n\to\infty$);

Так что, имея ввиду второй признак сравнения, достаточно исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$.

Применим интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3}dx=\int_1^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}dx=\left(-\frac{2}{3n\sqrt{n}}\right)\Bigg|_1^{\infty}=\frac{2}{3}$$

- следовательно, на основании второго (предельного) признака сравнения заключаем, что исходный ряд сходится.

Литература:

1) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. "Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента", том 2, 2003, стр. 18 (пример 52).