

1) Привести уравнение кривой второго порядка $2x^2 + 4x + y^2 - 2 = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения её с прямой $2x + y + 2 = 0$. Выполните графическую иллюстрацию полученного решения.

$$2x^2 + 4x + y^2 - 2 = 0$$

$$2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 2 + y^2 - 2 = 0$$

$$2 \cdot (x + 1)^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \text{ - каноническое уравнение эллипса с центром } (-1; 0),$$

$$a = \sqrt{2} \text{ - малая полуось эллипса,}$$

$$b = 2 \text{ - большая полуось эллипса.}$$

Фокусы эллипса лежат на прямой, параллельной оси Oy , т.к. $b > a$.

Точки пересечения эллипса с данной прямой (обозначим их P_1 и P_2) найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + y^2 - 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x - 2$$

$$2x^2 + 4x + (-2x - 2)^2 - 2 = 0$$

$$2x^2 + 4x + 4x^2 + 8x + 4 - 2 = 0$$

$$6x^2 + 12x + 2 = 0$$

$$3x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} & y_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x_2 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} & y_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

или

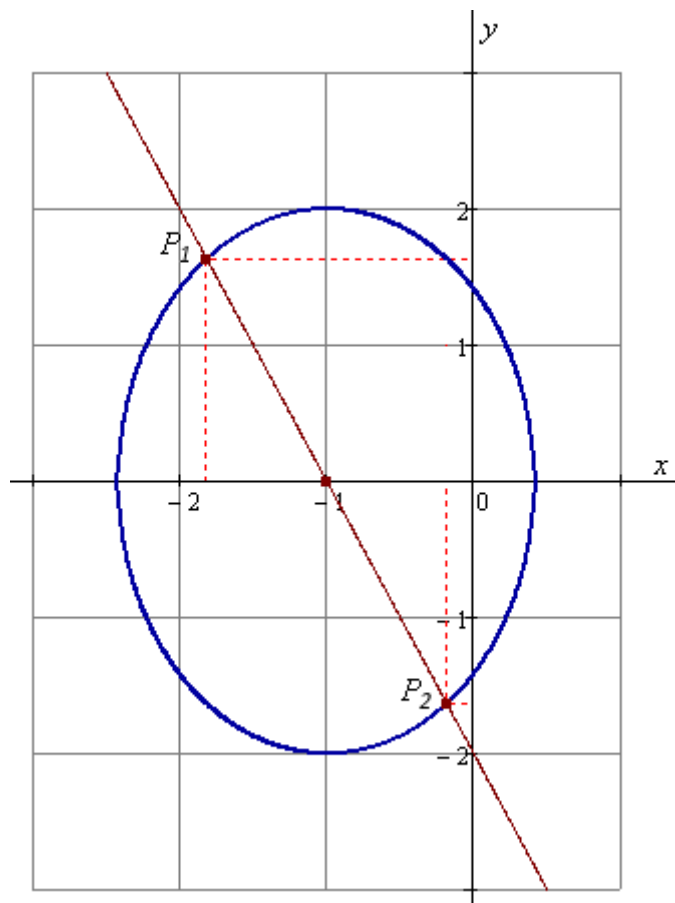
$$P_1\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right), P_2\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Сделаем графическую иллюстрацию полученного решения. Вычислим несколько точек на правой верхней четверти эллипса.

x	-1	-0,5	0	0,25	0,35	0,414
y	2	1,87	1,41	0,94	0,60	0

Вычислим пару точек на прямой.

x	-1	0
y	0	-2



2) Определить вид кривой и построить её:

$$2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0.$$

► Идентифицируем кривую, используя теорему [1, стр. 88]:

Теорема. Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ определяет:

окружность, если $A = C$,
 эллипс, если $A \cdot C > 0$,
 гиперболу, если $A \cdot C < 0$,
 параболу, если $A \cdot C = 0$.

При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (мнимую окружность), для гиперболы - в пару пересекающихся прямых, для параболы - в пару параллельных прямых.

В данном случае $A \cdot C = 2 \cdot 5 > 0$, следовательно, имеем дело с эллипсом.

► Приведём уравнение линии к каноническому виду.

$$2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$$

$$2 \cdot (x^2 - 6x) + 5 \cdot (y^2 + 2y) + 13 = 0$$

$$2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 18 + 5 \cdot (y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2) - 5 + 13 = 0$$

$$2 \cdot (x - 3)^2 + 5 \cdot (y + 1)^2 = 10$$

$$\frac{(x - 3)^2}{5} + \frac{(y + 1)^2}{2} = 1$$

$$\left(\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \text{ - каноническое уравнение эллипса с центром } (3; -1),$$

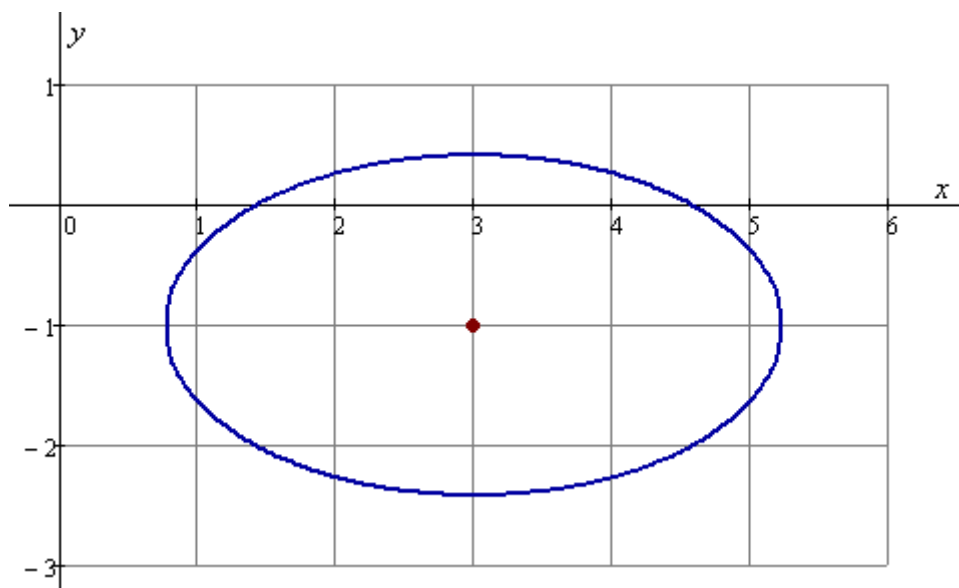
большой полуосью $a = \sqrt{5}$, малой полуосью $b = \sqrt{2}$.

Изобразим эллипс, просчитав несколько точек на его, например, правой верхней четверти по формуле

$$y = -1 + \sqrt{2 - \frac{2}{5} \cdot (x-3)^2}$$

Таблица построения эллипса:

x	3	3,5	4	4,5	5	5,24
y	0,41	0,38	0,27	0,05	-0,37	-1



Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006.

3) Привести уравнение кривой $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - 4y + 11}$ к каноническому виду и построить кривую.

$$x = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - 4y + 11}$$

$$x - 1 = -\sqrt{\frac{1}{2}y^2 - 4y + 11}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 11 \\ x-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)^2 = (y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2) - 16 + 22 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)^2 = (y-2)^2 + 6 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{y-2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Получено каноническое уравнение гиперболы при дополнительном условии $x \leq 1$.

Для вычисления точек кривой используем формулу

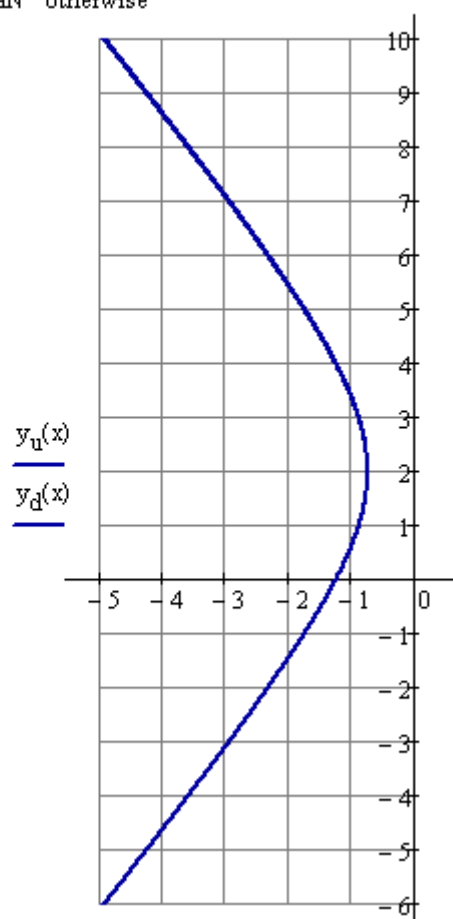
$$\begin{cases} y = 2 \pm \sqrt{2(x-1)^2 - 6} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Таблица для построения гиперболы (верхняя часть левой ветви относительно оси симметрии гиперболы $y = 2$):

x	-4	-3	-2	-1	-0,73
y	8,63	7,10	5,46	3,41	2

Построение графика в Mathcad 14:

$$y_u(x) := \begin{cases} \left[2 + \sqrt{2 \cdot (x-1)^2 - 6}\right] & \text{if } x \leq 1 \\ \text{NaN} & \text{otherwise} \end{cases} \quad y_d(x) := \begin{cases} \left[2 - \sqrt{2 \cdot (x-1)^2 - 6}\right] & \text{if } x \leq 1 \\ \text{NaN} & \text{otherwise} \end{cases}$$



4) Привести уравнение

$$12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$$

к каноническому виду и определить тип кривой.

Определим канонический вид уравнения линии второго порядка при помощи инвариантов.

► Для квадратичной функции

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_{11} \cdot x^2 + 2a_{12} \cdot xy + a_{22} \cdot y^2 + 2a_1 \cdot x + 2a_2 \cdot y + a_0 = \\ &= 12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 \end{aligned}$$

составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 6 & 5 & -11 \\ -6 & -11 & -19 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Вычисляем инварианты.

$$\tau = a_{11} + a_{22} = 0 + 5 = 5$$

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

$$\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 6 & 5 & -11 \\ -6 & -11 & -19 \end{vmatrix} = 1296$$

Так как $\delta \neq 0$, то вычислять семиинвариант K не нужно.

Поскольку $\begin{cases} \delta < 0 \\ \Delta \neq 0 \end{cases}$, то (определяем по таблице 3.2 из [1]) уравнение задаёт гиперболу.

► Матрица квадратичной формы для левой части канонических уравнений имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

где λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = 0$, для гиперболического случая взятые согласно правилу $\lambda_1 \cdot \Delta > 0$, если $\Delta \neq 0$, и $\lambda_1 > 0$, если $\Delta = 0$.

В данном случае из уравнения $\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$ получаем $\lambda_1 = 9$ и $\lambda_2 = -4$.

► Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1 и l_2 , соответствующие корням λ_1 и λ_2 , решая уравнения

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0, \quad i = 1, 2$$

что сводится к совокупности однородных систем уравнений

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0-9 & 6 \\ 6 & 5-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0+4 & 6 \\ 6 & 5+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

откуда находим ненулевые решения

$$I_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad I_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Нормируем полученные векторы и получим координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$s_1 = \frac{I_1}{|I_1|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{I_2}{|I_2|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

► Находим координаты x_0 и y_0 начала O' канонической системы координат, решая систему

$$A \cdot s + a = 0$$

$$\begin{cases} 0x + 6y - 6 = 0 \\ 6x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$$

получаем

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

- т.е. начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(1;1)$ относительно исходной системы координат.

► Канонический вид уравнения гиперболы:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Вычисляем коэффициенты канонического уравнения гиперболы

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = -\frac{1296}{9 \cdot (-36)} = 4$$

$$b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} = \frac{1296}{-4 \cdot (-36)} = 9$$

т.е. уравнение в каноническом виде

$$\frac{(x')^2}{2^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1$$

Литература:

1) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Аналитическая геометрия в примерах и задачах", 2005, стр. 316, 321 (пример 3.25).

5) Установить, какая линия задана уравнением. Найти вершины, фокусы, сделать чертёж:

$$7x^2 + 9y^2 - 4xy = 1.$$

$$7x^2 + 9y^2 - 4xy - 1 = 0$$

- линия 2-го порядка, определяемая уравнением $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Так как определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 63 - 4 = 59 \neq 0,$$

то линия центральная.

Находим центр симметрии. Его координаты должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_0 - 2y_0 = 0 \\ -2x_0 + 9y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Повернём систему координат xOy на угол φ :

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{7 - 9}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\operatorname{ctg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\varphi}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}}$$

В результате поворота получаем каноническую систему координат $\tilde{x}O\tilde{y}$, в которой уравнение линии имеет вид:

$$\tilde{a}_{11}\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{a}_{33} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi = \\ &= 7 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \right) + 2 \cdot (-2) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) = 8 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{22} &= a_{11} \cdot \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cdot \cos^2 \varphi = \\ &= 7 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) - 2 \cdot (-2) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \right) = 8 + \sqrt{5} \\ \tilde{a}_{33} &= -1\end{aligned}$$

Следовательно

$$(8 - \sqrt{5}) \cdot \tilde{x}^2 + (8 + \sqrt{5}) \cdot \tilde{y}^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{8 - \sqrt{5}} \right)} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{8 + \sqrt{5}} \right)} = 1$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{8 + \sqrt{5}}{59} \right)} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{8 - \sqrt{5}}{59} \right)} = 1$$

- каноническое уравнение эллипса.

Базисными векторами канонической системы координат являются векторы

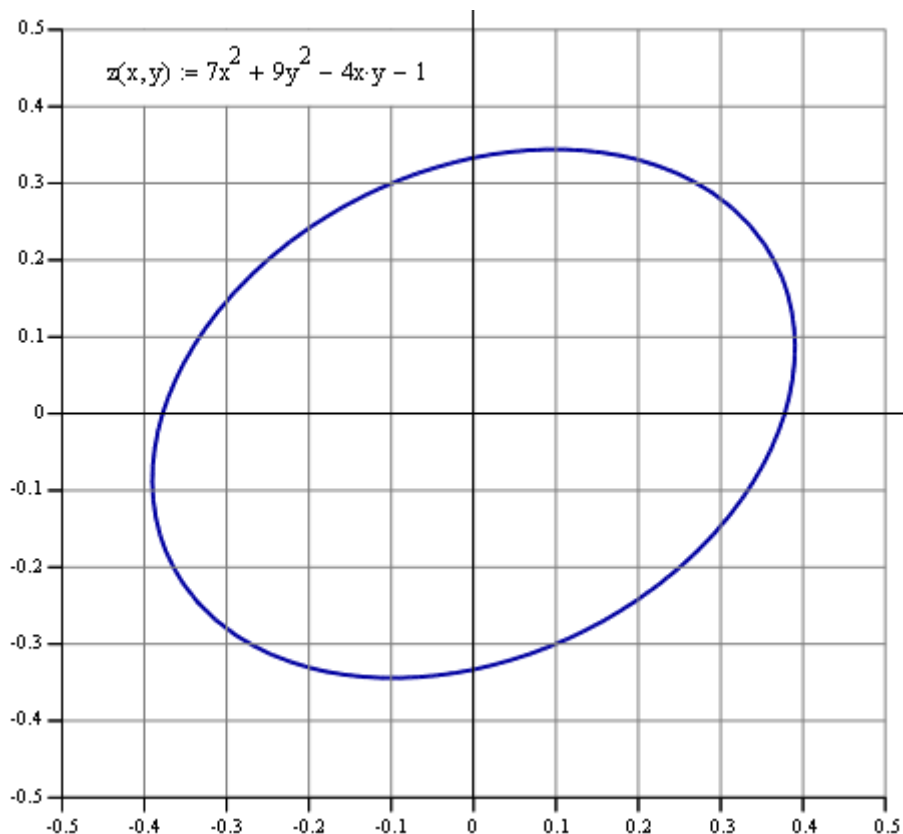
$$\vec{e}_1 = (\cos \varphi ; \sin \varphi)$$

$$\vec{e}_2 = (-\sin \varphi ; \cos \varphi)$$

или

$$\vec{e}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}} ; \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}} \right)$$

$$\vec{e}_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}} ; \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}} \right)$$



Литература:

- 1) Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. "Геометрия", 2003, стр. 178 (задача 4);
- 2) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Аналитическая геометрия в примерах и задачах", 2005.

6) Привести к каноническому виду (методом выделения полного квадрата) уравнение поверхности

$$16x^2 + 9y^2 - 144z^2 - 96x + 18y + 9 = 0.$$

Определить тип поверхности и выписать основные параметры.

Приведём каноническое уравнение поверхности к каноническому виду методом выделения полных квадратов:

$$16x^2 + 9y^2 - 144z^2 - 96x + 18y + 9 = 0$$

$$((4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 12 + 12^2) - 12^2 + ((3y)^2 + 2 \cdot 3y \cdot 3 + 3^2) - 3^2 - (12z)^2 + 9 = 0$$

$$(4x - 12)^2 + (3y + 3)^2 - (12z)^2 = 144$$

$$16 \cdot (x - 3)^2 + 9 \cdot (y + 1)^2 - 144 \cdot (z - 0)^2 = 144$$

$$\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{144}{16}\right)} + \frac{(y+1)^2}{\left(\frac{144}{9}\right)} - \frac{(z-0)^2}{1} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{4^2} - \frac{(z-0)^2}{1^2} = 1$$

- получено каноническое уравнение однополостного гиперboloида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Центр однополостного гиперboloида $O(3; -1; 0)$, параметры $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$.

7) Определить тип цилиндрической поверхности $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$. Указать образующую и направляющую цилиндра. Сделать чертёж.

Чтобы указать тип цилиндрической поверхности, рассмотрим данное уравнение как общее уравнение линии второго порядка $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Поскольку $A \cdot C = 1 \cdot 4 > 0$, то данное уравнение определяет эллипс. Приведём уравнение эллипса к каноническому виду:

$$x^2 + 4y^2 - 8x = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) - 4^2 + (2y)^2 = 0$$

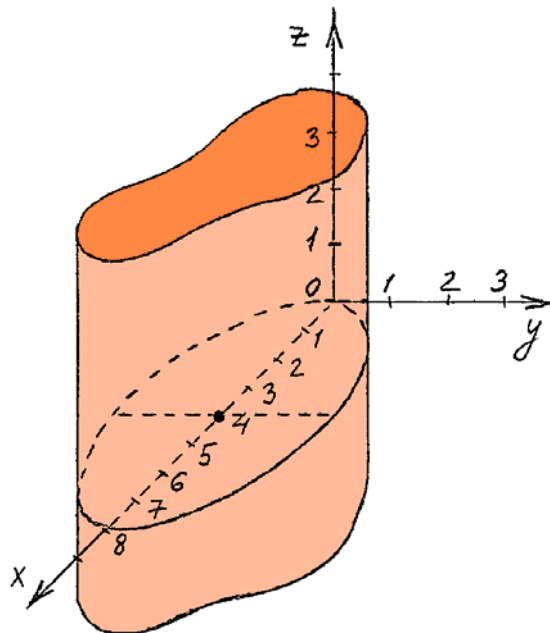
$$(x - 4)^2 + 4 \cdot (y - 0)^2 = 4^2$$

$$\frac{(x - 4)^2}{4^2} + \frac{(y - 0)^2}{2^2} = 1$$

- это каноническое уравнение эллипса с центром $O(4; 0)$ и параметрами $a = 4$ (большая полуось эллипса) и $b = 2$ (малая полуось эллипса).

Итак, данная поверхность является эллиптическим цилиндром. Линия эллипса в плоскости $z = \text{const}$ является направляющей цилиндра, а образующие цилиндра параллельны оси Oz . В качестве примера можно указать образующую

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Показано сечение эллиптического цилиндра плоскостью $z = 0$.

Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006;
- 2) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Аналитическая геометрия в примерах и задачах", 2005.