1) Дано уравнение кривой $y = x^3 + 2x - 1$, точка $x_0 = 0$ и уравнение прямой $5x - y + 3 = 0$.

Требуется:

а) составить уравнения касательной и нормали к данной кривой $y = f(x)$ в точке с абциссой x_0;

б) найти точку на кривой $y = f(x)$, в которой касательная параллельна данной прямой.

Уравнение касательной и нормали к графику функции $y(x)$ в точке $(x_0; y_0)$:

$(y - y_0) = k \cdot (x - x_0)$ - касательная;

$(y - y_0) = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_0)$ - нормаль, где $k = y'(x_0)$

а)

► Уравнение касательной в точке x_0:

$$(y - y_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y' = (x^3 + 2x - 1)' = 3x^2 + 2$$

$$y'(x_0) = y'(0) = 2$$

$$y(x_0) = y(0) = -1$$

$$y - (-1) = 2 \cdot (x - 0)$$

$$y + 1 = 2x$$

$$y = 2x - 1$$

- уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 2x - 1$ в точке $x_0 = 0$.

► Уравнение нормали в точке x_0:

$$(y - y_0) = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-1) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0)$$

$$y + 1 = -\frac{x}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

- уравнение нормали к графику функции $y = x^3 + 2x - 1$ в точке $x_0 = 0$.

б)

Найдём точку на кривой $y = x^3 + 2x - 1$, в которой касательная параллельна прямой

$$5x - y + 3 = 0$$

$$y = 5x + 3$$

Обозначим эту точку $A(x_A; y_A)$; тогда

$$(y - y_A) = y'(x_A) \cdot (x - x_A)$$

- касательная в этой точке; причём из условия параллельности её прямой $y = 5x + 3$ следует, что $y'(x_A) = 5$ (угловые коэффициенты одинаковы), а поскольку $y' = 3x^2 + 2$, то

$3x_A^2 + 2 = 5$

$x_A^2 = 1$

$x_{A1} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{A1} = 2$

$x_{A2} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_{A2} = -4$

Итак, таких точек две: $A_1(-1;-4)$ и $A_1(1;2)$.

2) Составить уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной параметрически;

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

в точках $t_0 = 1$ и $t_1 = 2$.

Уравнение касательной и нормали к графику функции $y(x)$ в точке $(x_0; y_0)$:

$(y - y_0) = k \cdot (x - x_0)$ - касательная;

$(y - y_0) = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_0)$ - нормаль, где $k = y'_x(x_0)$

Производная данной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1 - t^2}{1 - t} \right)$$

► В точке $t_0 = 1$ производная функции не определена, хотя сама функция в этой точке существует. Слева и справа от этой точки функция $y(x)$ убывает:

t	$\to 1-0$	1	$\to 1+0$
y'_x	$+$	н.с.	$-$
$y(x)$	↗	2 (max)	↘

(н.с. - не существует; ↗ - интервал возрастания, ↘ - интервал убывания)

- точка $t = 1$ - точка острого максимума. Касательная и нормаль к графику функции в данной точке не определены.

► В точке $t_1 = 2$:

$$y'_x(t = 2) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1 - 2^2}{1 - 2} \right) = \frac{9}{2}$$

$x(t = 2) = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$

$y(t = 2) = 3 \cdot 2 - 2^3 = -2$

$$y - (-2) = \frac{9}{2} \cdot (x - 0)$$

$y = \frac{9}{2}x - 2$ - уравнение касательной.

$$y-(-2)=-\frac{2}{9}\cdot(x-0)$$

$y=-\frac{2}{9}x-2$ - уравнение нормали.
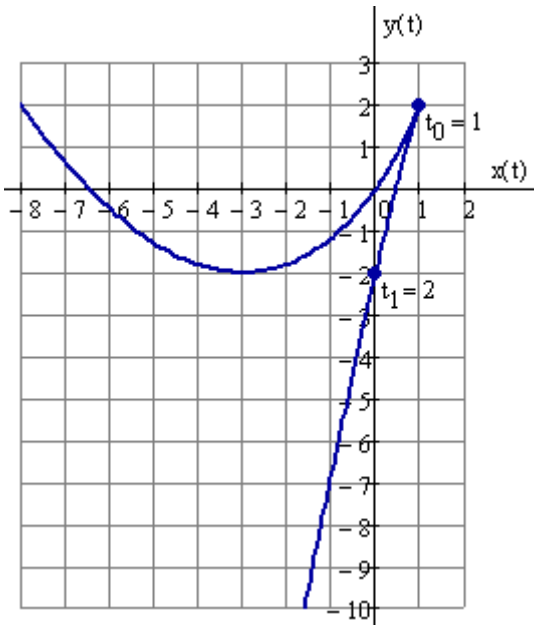
Иллюстрация к задаче: