

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 10 марта 2014 г.

1. В множестве $\{1, 2, 3, \dots, 2014\}$ выбрали подмножество A . Оказалось, что никакой квадратный трехчлен, все три коэффициента которого принадлежат A , не имеет действительных корней. Какое наибольшее число элементов могло быть в A ?

Г. Жуков

2. Дан треугольник ABC . Луч, проведенный из вершины B через середину AC , пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке P . Прямая PC пересекает прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла A , в точке Q . Докажите, что $BA = BQ$.

Ф. Ивлев

3. Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит *значимость* k , если после этого у него будет k статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы k статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?

И. Богданов, Е. Молчанов

4. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' — центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D — центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани — равные треугольники. Вневписанная сфера — это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

А. Заславский

5. В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили K клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что $K \geq 100$.

П. Кожевников

6. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрант $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Л. Стунжас