КЛАСС!!!НЫЕ ПОДСКАЗКИ

ГЕОМЕТРИЯ

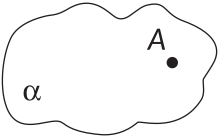
10–11 КЛАССЫ

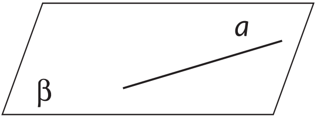
Литера

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

Простейшие фигуры — точка, прямая, плоскость.





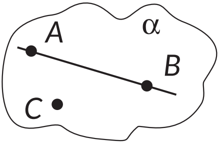
$A \in \alpha$ $\qquad$ $a \subset \beta$

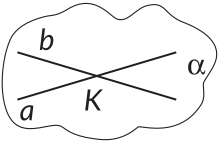
Основные аксиомы

1. Если A, B, C не лежат на одной прямой, то через них проходит плоскость, и только одна.
2. Если $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, то все точки прямой AB лежат в плоскости α.
3. Если $A \in \alpha$, $A \in \beta$, то α и β имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Следствия

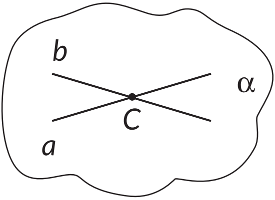
- Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.
- Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.





ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пересекающиеся прямые

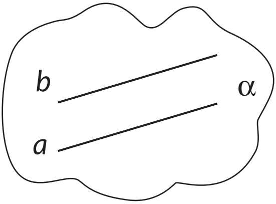


$a \times b$

(a и b лежат в одной плоскости

C — единственная общая точка прямых a и b)

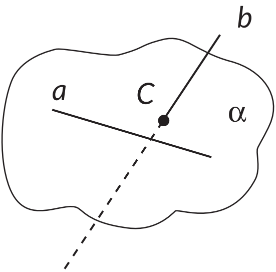
Параллельные прямые



$a \parallel b$

(a и b лежат в одной плоскости и у них нет общих точек)

Скрещивающиеся прямые



$a \lambda b$

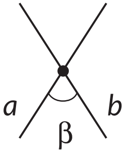
(a и b не лежат в одной плоскости)

УГОЛ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Пусть $\widehat{ab}$ — угол между прямыми, $d\,(a;\,b)$ — расстояние между прямыми.

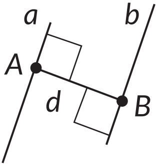
❶ $\boldsymbol{a \times b}$

$\widehat{ab} = \beta$, где β — наименьший из четырёх вертикальных углов при пересечении a и b;
$d\,(a;\,b) = 0$



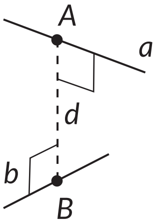
❷ $\boldsymbol{a \parallel b}$

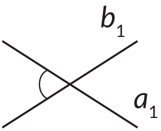
$\widehat{ab} = 0^\circ$ или 180°;
$d\,(a;\,b) = AB$, где $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB \perp b$



❸ $\boldsymbol{a \lambda b}$

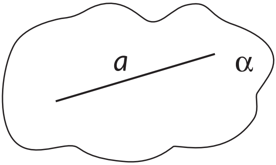
$\widehat{ab} = \widehat{a_1b_1} : a_1 \parallel a,\ b_1 \parallel b,\ a_1 \times b_1$;
$d\,(a;\,b)$ — длина такого отрезка AB, где $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB \perp b$





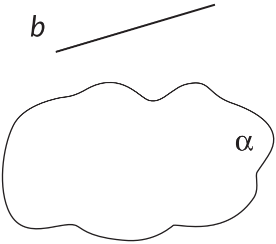
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

❶ Прямая, принадлежащая плоскости



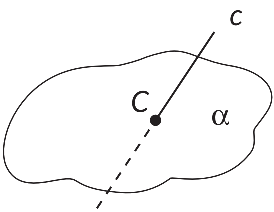
$a \subset \alpha$
(все точки прямой *принадлежат плоскости* α)

❷ Прямая, параллельная плоскости



$b \parallel \alpha$
(у прямой b *и плоскости* α нет общих точек)

❸ Прямая, пересекающая плоскость



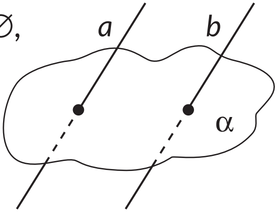
$c \times \alpha$
(C — единственная общая точка)

Частный случай: $c \perp \alpha$, если $c \perp$ к любой прямой этой плоскости.

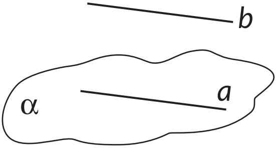
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Теоремы

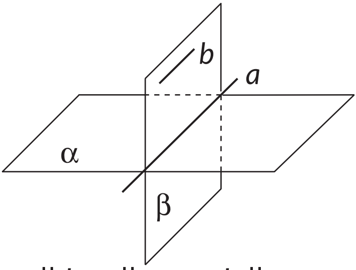
1. Если $A \notin a$, то существует единственная прямая $c : A \in c,\ c \parallel a$.
2. Если $a \parallel b,\ a \cap \alpha \neq \varnothing$, то $b \cap \alpha \neq \varnothing$.



3. Если $a \parallel b,\ b \parallel c$, то $a \parallel c$.
4. Признак параллельности прямой и плоскости: если $b \not\subset \alpha,\ a \subset \alpha,\ a \parallel b$, то $b \parallel \alpha$.



5. Если $b \subset \beta,\ b \parallel \alpha,\ \alpha \cap \beta = a$, то $b \parallel a$.

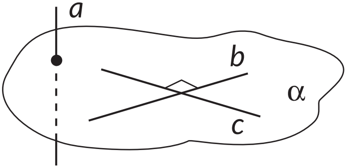


6. Если $a \parallel b,\ a \parallel \alpha$, то $b \parallel \alpha$ или $b \subset \alpha$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ К ПЛОСКОСТИ

Перпендикулярными прямыми ($a \perp b$) называются прямые a и b, угол между которыми прямой ($\widehat{ab} = 90°$).

Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися, а могут быть скрещивающимися ($b \perp c$; $a \perp b$; $a \perp c$).

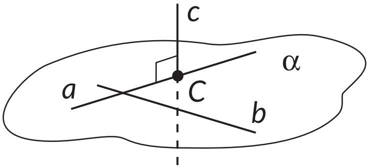


Теорема. Если $a \parallel c$, $a \perp b$, то $c \perp b$.

Прямая c называется **перпендикулярной к плоскости α** ($c \perp \alpha$), если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теоремы

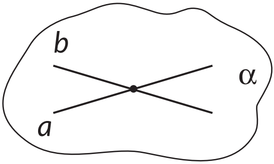
1. Если $b \perp \alpha$, $c \perp \alpha$, то $b \parallel c$.
2. Если $b \parallel c$, $b \perp \alpha$, то $c \perp \alpha$.
3. Если $c \perp a$, $c \perp b$, $c \times a$, $a \times b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, то $c \perp \alpha$ (признак перпендикулярности прямой к плоскости).

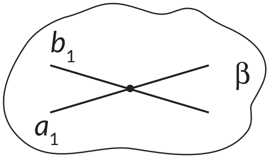


ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Это плоскости, не имеющие общих точек.

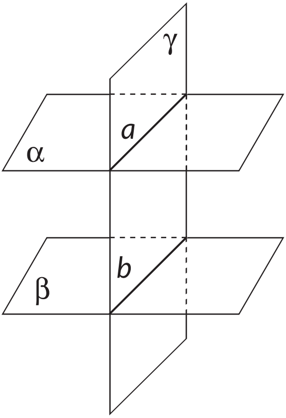
1 Если $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $a \times b$, $a_1 \times b_1$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.





2 Если $a \perp \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

3 Если $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, то $a \parallel b$.

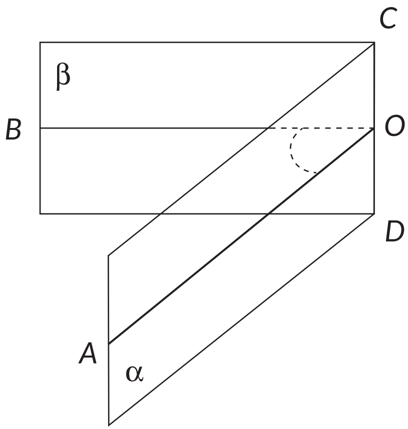


ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Это фигура, образованная двумя полуплоскостями (гранями) с общей границей (ребром).

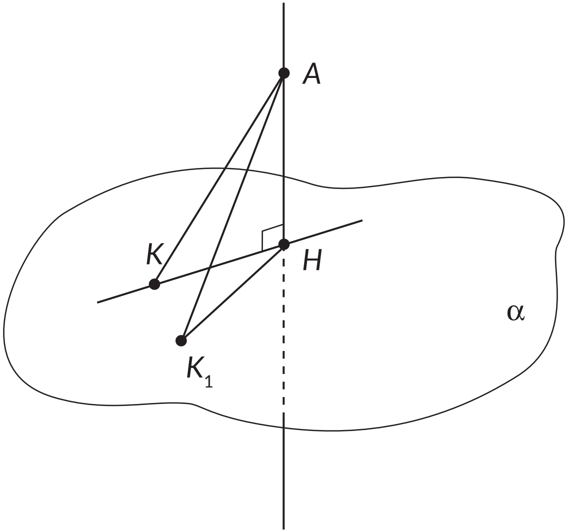
Линейный угол двугранного угла

Двугранный угол измеряется своим **линейным углом** — углом между перпендикулярами к ребру двугранного угла, восстановленными в обеих гранях из одной точки ребра.



$\angle AOB$ — линейный угол двугранного угла, если $O \in CD$, $AO \perp CD$, $BO \perp CD$, $AO \subset \alpha$, $BO \subset \beta$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ К ПЛОСКОСТИ



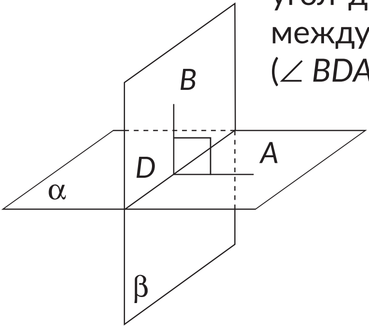
Если прямая $AH \perp \alpha$, $H \in \alpha$, то отрезок AH — перпендикуляр к α; H — основание перпендикуляра.

Если $K \in \alpha$, $K \neq H$, то AK — наклонная к α; K — основание наклонной, HK — проекция наклонной AK на α.

Из одной точки к плоскости можно провести один перпендикуляр и бесчисленное множество наклонных.

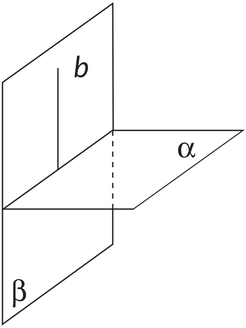
Пусть AK и AK_1 — наклонные к α, KH и K_1H — их проекции на α. Тогда $AK = AK_1 \leftrightarrow HK = HK_1$; $AK > AK_1 \leftrightarrow HK > HK_1$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

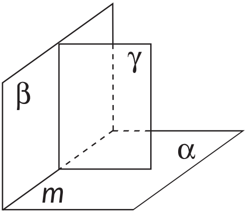


$\alpha \perp \beta$, если линейный угол двугранного угла между α и β — прямой ($\angle BDA = 90^\circ$)

Признак перпендикулярности плоскостей



Если $b \subset \beta$, $b \perp \alpha$, то $\beta \perp \alpha$.

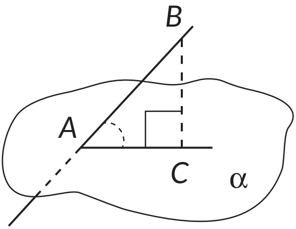


Теорема

Если $\alpha \cap \beta = m$, $\gamma \perp m$, то $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$.

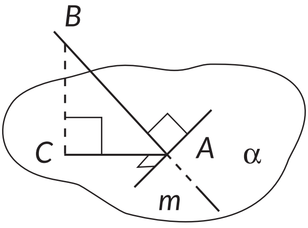
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Это угол между прямой и её проекцией на плоскость.



$\angle BAC$ — угол между прямой AB и плоскостью α

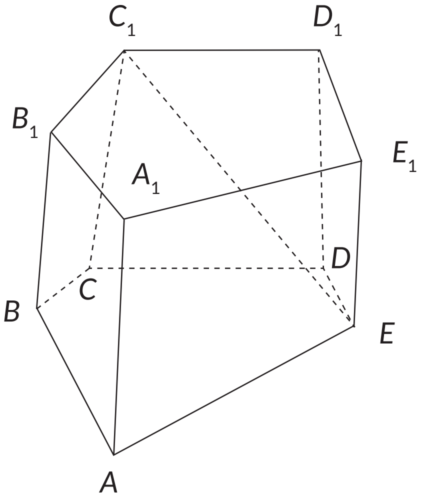
Теорема о трёх перпендикулярах



Если $BC \perp \alpha$, BA — наклонная к плоскости α, CA — проекция BA на плоскость α, $m \subset \alpha$, $A \in m$, $m \perp BA$, то $m \perp CA$. Если же $m \perp CA$, то $m \perp BA$.

МНОГОГРАННИКИ

Многогранник — тело, граница которого состоит из многоугольников.



$ABCDE$, AA_1E_1E ... — грани

A, A_1, B, B_1 ... — вершины

AA_1, B_1C_1 ... — рёбра

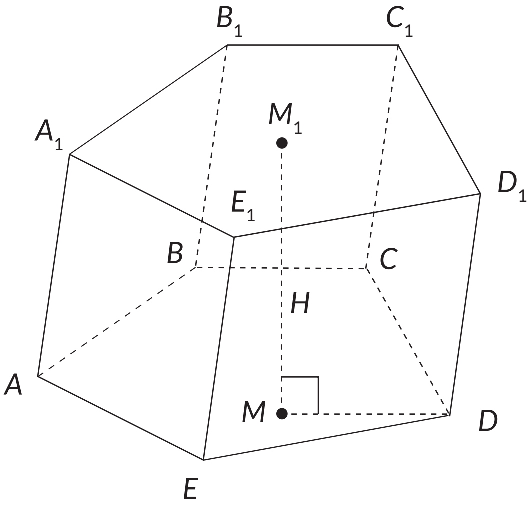
C_1E — одна из диагоналей

Диагональ соединяет две вершины, **не принадлежащие одной грани.**

Многоугольник вписан в сферу, если все его вершины ей принадлежат; **сфера вписана** в многоугольник, если все его грани касаются сферы (имеют с ней единственную общую точку).

Призма

Это многогранник, две грани которого (основания) — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани (боковые) — параллелограммы.



$ABCDE \parallel A_1B_1C_1D_1E_1$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel EE_1$

$H = MM_1 \perp ABCDE$

$(M \in ABCDE; M_1 \in A_1B_1C_1D_1E_1)$

Высота призмы (*H*) — перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания к плоскости другого.

Прямая призма — призма, у которой боковые грани — прямоугольники, а все боковые рёбра перпендикулярны к плоскостям оснований.

$ABCD = A_1B_1C_1D_1$

$ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$

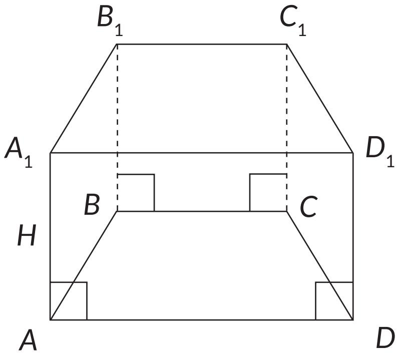
$AA_1 \perp ABCD$

$BB_1 \perp ABCD$

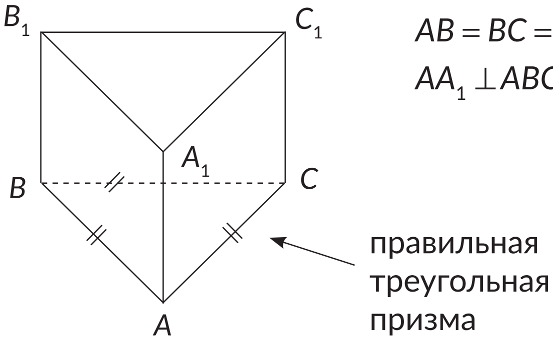
$CC_1 \perp ABCD$

$DD_1 \perp ABCD$

$H = AA_1$



Правильная призма — прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

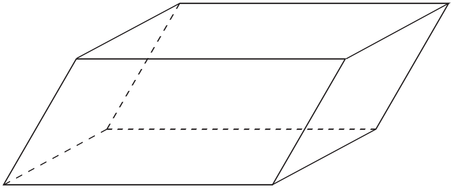


$AB = BC = CA$

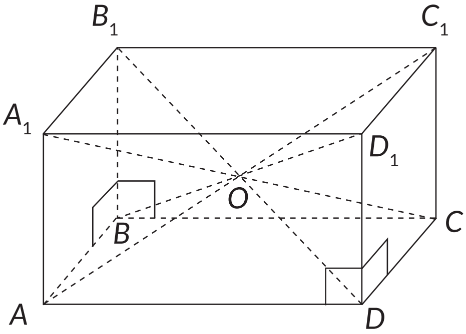
$AA_1 \perp ABC$

Параллелепипед

Это призма, основания и боковые грани которого — параллелограммы.

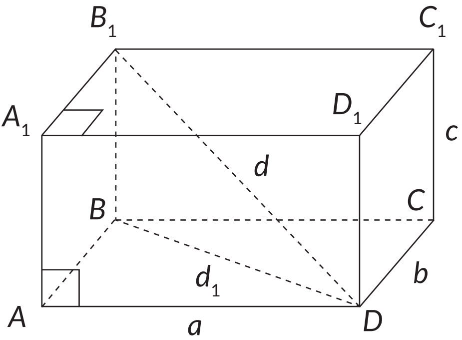


Прямой параллелепипед — параллелепипед, боковые грани которого — прямоугольники.



У параллелепипеда четыре диагонали: AC_1, BD_1, CA_1, DB_1. Они пересекаются в одной точке O, которая каждую из них делит пополам.

Прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, у которого все шесть граней — прямоугольники.



Измерения параллелепипеда *a*, *b*, *c* — длины трёх рёбер с общей вершиной.

d — диагональ параллелепипеда

d_1 — диагональ основания

Все четыре диагонали параллелепипеда равны.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

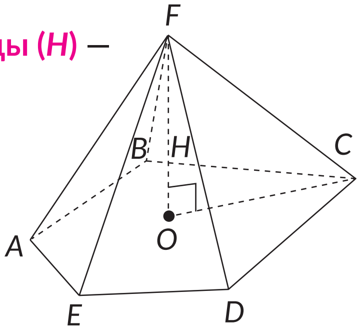
Все двугранные углы — прямые.

Куб — прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. Это правильный многоугольник.

Пирамида

Это многогранник, у которого основание — n-угольник, а боковые грани — треугольники с общей вершиной (вершиной пирамиды).

Высота пирамиды (H) — перпендикуляр, опущенный из вершины на основание.



$H = FO$

$FO \perp ABCDE$

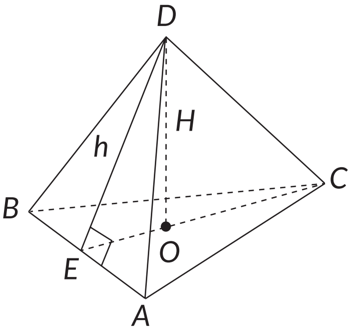
У **правильной пирамиды** основание — правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания. Её боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

$AB = BC = AC$

$AD = BD = CD$

$H = DO$

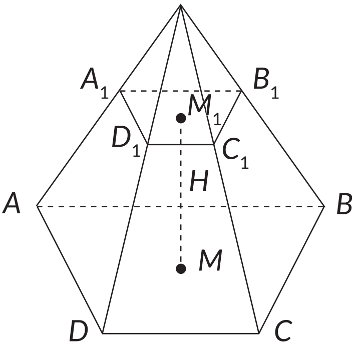
$h = DE$



Апофема (h) — высота боковой грани правильной пирамиды.

Усечённая пирамида

Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая её боковые рёбра, делит пирамиду на два многогранника — пирамиду и **усечённую пирамиду.**



$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания
$ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$
$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$
Если $M_1 \in A_1B_1C_1D_1$, $M_1M \perp ABCD$, $M \in ABCD$, то M_1M — высота H усечённой пирамиды.

Боковые грани усечённой пирамиды — **трапеции.**
Усечённая пирамида называется **правильной,** если она получена из правильной пирамиды. Её основания — правильные n-угольники, боковые грани — равнобедренные трапеции. Высоты их — апофемы (h).

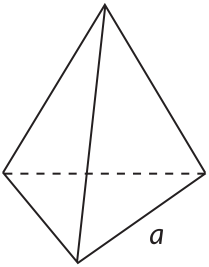
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Правильный многогранник — это многогранник, грани которого — равные правильные многоугольники, а в каждой вершине сходится одно и то же число граней. Правильный n-угольник можно вписать в сферу, вокруг него можно описать сферу. Центры этих сфер совпадают.

R — радиус описанной сферы

r — радиус вписанной сферы

Тетраэдр (четырёхгранник)



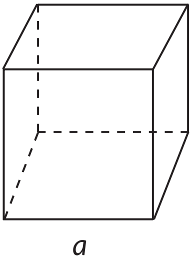
Грани — 4 треугольника

Рёбра — 6

Вершины — 4

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \qquad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Гексаэдр (шестигранник) — куб



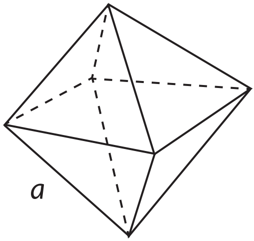
Грани — 6 квадратов

Рёбра — 12

Вершины — 8

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad r = \frac{a}{2}$$

Октаэдр (восьмигранник)



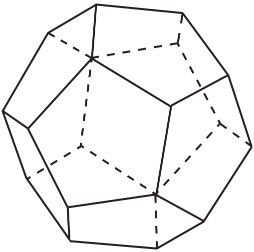
Грани — 8 треугольников

Рёбра — 12

Вершины — 6

$R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Додекаэдр (двенадцатигранник)



Грани — 12 пятиугольников

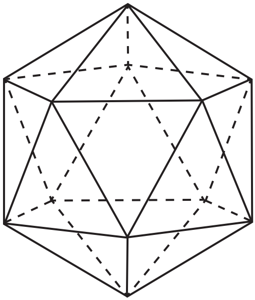
Рёбра — 30

Вершины — 20

$$R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$$

Икосаэдр (двадцатигранник)



Грани — 20 треугольников

Рёбра — 30

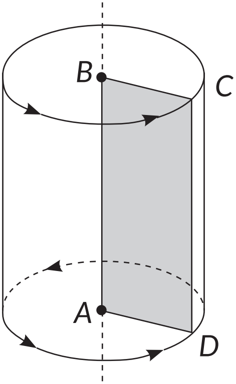
Вершины — 12

$$R = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$$

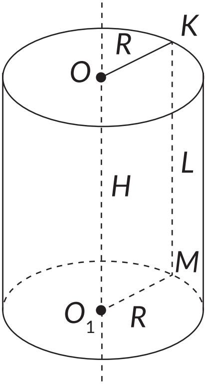
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР



При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB отрезки BC и AD опишут равные круги, а отрезок CD — поверхность, называемую цилиндрической.

Ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами, расположенными в параллельных плоскостях, геометрическое тело называется **цилиндром.**



Окружность $(O;\ R)$ и окружность $(O_1;\ R)$ — основания

KM — образующая (L)

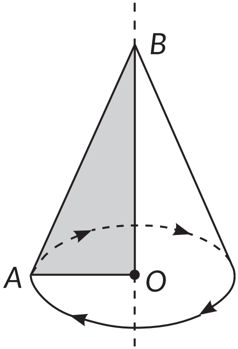
OO_1 — высота (H)

$H = L$

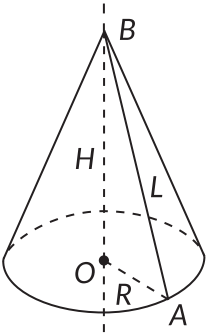
Боковая поверхность цилиндра (цилиндрическая поверхность) — прямоугольник со сторонами H и C ($C = 2\pi R$) — длина окружностей оснований.

Конус

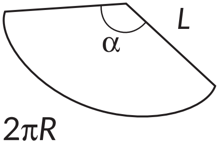
При вращении прямоугольного треугольника AOB вокруг одного из катетов (BO) точка A опишет окружность, а отрезок AB — поверхность, называемую **конической.**



Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, называется **конусом.**



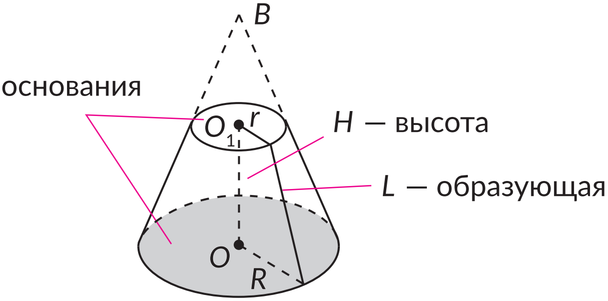
Круг (O; R) — основание
BA — образующая (L)
BO — высота (H)



Боковая поверхность конуса (коническая поверхность) — сектор круга с радиусом L, длина которого $2\pi R$ ($R \neq L$).

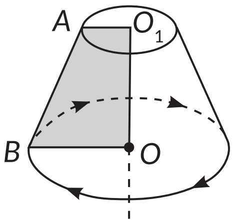
Усечённый конус

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая его образующие, делит конус на два тела — конус и **усечённый конус.**



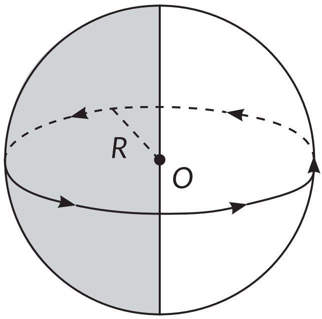
Часть конической поверхности, ограничивающая усечённый конус, — боковая поверхность.

Это тело может быть получено вращением прямоугольной трапеции OO_1AB вокруг стороны OO_1. При вращении стороны AB образуется боковая поверхность, а при вращении отрезков O_1A и OB — круги — основания усечённого конуса.



Сфера

Это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Точка O — центр сферы, R — её радиус.



Сфера (сферическая поверхность) может быть получена вращением полуокружности (O; R) вокруг её диаметра.

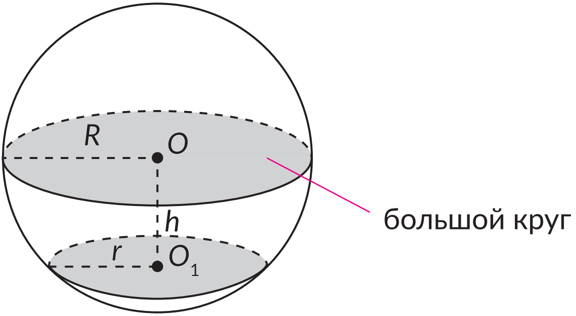
Уравнение сферы с центром в точке O (0; 0; 0)

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

Шар

Это тело, ограниченное сферической поверхностью.

Сечение шара — круг. R — радиус наибольшего из сечений большого круга.



Если $r = R$, то сечение шара — большой круг. O — центр шара и центр большого круга.

$$\boxed{r^2 = R^2 - h^2}$$

Центр, радиус, диаметр сферы называются также центром, радиусом, диаметром шара.
Шар радиуса R с центром O состоит только из тех точек пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не большем R.

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЁМЫ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности

$S_{полн}$ — площадь полной поверхности

V — объём

Наклонная призма

$$\boxed{S_{бок} = P_{\perp сеч} \cdot l}$$

$$\boxed{S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}}$$

$$\boxed{V = S_{осн} \cdot H = S_{\perp сеч} \cdot l}$$

$P_{\perp сеч}$ — периметр сечения, перпендикулярного к боковому ребру

l — боковое ребро

$S_{осн}$ — площадь основания

H — высота призмы

$S_{\perp сеч}$ — площадь сечения, перпендикулярного к боковому ребру

Прямая призма

$$\boxed{S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H}$$

$$\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}}$$

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot H}$$

$P_{\text{осн}}$ — периметр основания

Прямоугольный параллелепипед

$$\boxed{S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H = 2\,(a + b) \cdot c}$$

$$\boxed{S_{\text{полн}} = 2\,(ab + ac + bc)}$$

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

a, b, c — измерения параллелепипеда

Произвольная пирамида

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания
H — высота

Правильная пирамида

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h$$

$P_{\text{осн}}$ — периметр основания
h — апофема

Усечённая пирамида

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

H — высота
S_1, S_2 — площади оснований

Правильная усечённая пирамида

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h$$

P_1, P_2 — периметры оснований
h — апофема

Тетраэдр

$$S = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Гексаэдр

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$

Октаэдр

$$S = 2a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

a — ребро правильного многогранника
S — площадь поверхности

Додекаэдр

$$S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$$

Икосаэдр

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$$

S — площадь поверхности

a — ребро правильного многогранника

Цилиндр

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R\,(R + H)$$

$$V = \pi R^2 H$$

R — радиус основания

H — высота

Конус

$$S_{бок} = \pi RL$$

$$S_{бок} = \frac{\pi L^2 \alpha}{360}$$

$$S_{полн} = \pi R\,(L + R)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

R — радиус основания
L — образующая
α — градусная мера сектора конической поверхности
H — высота

Усечённый конус

$$S_{бок} = \pi\,(r + R)\,L$$

$$S_{полн} = \pi\,(r + R)\,L + \pi r^2 + \pi R^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(r^2 + rR + R^2)$$

R, r — радиусы оснований
L — образующая
H — высота

Шар

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

S — площадь поверхности
R — радиус шара
d — диаметр шара