Задача 16

В 2015 году задача 16 (ранее задача С2) без изменения тематики (Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин. Координаты и векторы.) стала содержать два пункта с требованиями «доказать» и «найти». Каждый из пунктов независимо оценивался 1 баллом.

Задача 16 предполагала:

– владение как стереометрическими понятиями (такими как пирамида, высота пирамиды, перпендикулярность прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью и др.) так и планиметрическими (в частности, понятием прямоугольного треугольника, определениями тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника и др.), а также фактами, связанными с этими понятиями;

– умение изображать пирамиду, проводить дополнительные построения, направленные на изображение и поиск угла между прямой и плоскостью;

– знание признаков перпендикулярности прямой и плоскости и умение их использовать при решении задачи;

– знание обратной теоремы Пифагора и умение ею воспользоваться в нужной ситуации;

– владение навыками нахождения угла по значению тригонометрической функции при выполнении вычислительной составляющей решения.

Приведем один из примеров задачи 16:

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 4$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 4$ и $SD = \sqrt{23}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Типичные ошибки в решениях задачи 16

1. Самой распространенной ошибкой при решении задачи 16 в 2015 году была неверная трактовка признака перпендикулярности прямой и плоскости: учащиеся (упрощая себе задачу) считали достаточным доказать перпендикулярность рассматриваемой прямой только одной прямой плоскости для того, чтобы утверждать перпендикулярность прямой и плоскости. В то время, как признак гласит «Если прямая перпендикулярна <u>двум</u> пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости». В итоге доказательство в пункте а) было неполным и оценивалось 0 баллов.

Пример 1.

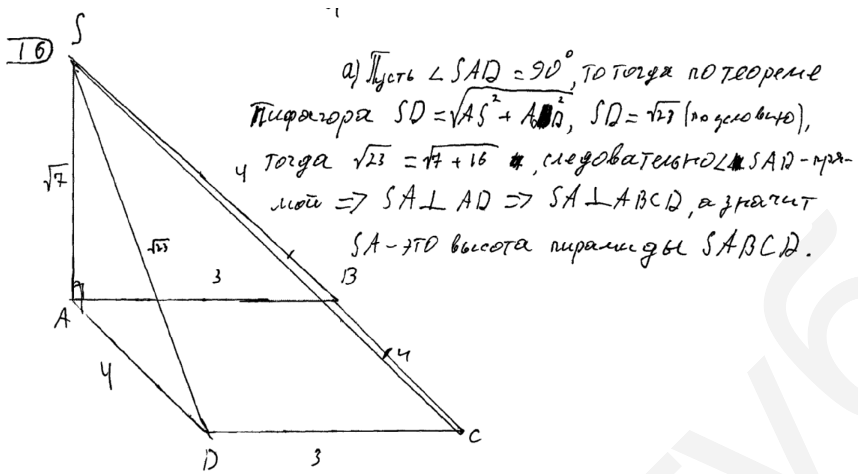


Рис. 11.1.

Комментарии: В решении пункта а) задачи 16 на рисунке 11.1. содержится типовая ошибка, заключающаяся в незнании (или неверном понимании) признака перпендикулярности прямой и плоскости. Рассмотрение одного треугольника и доказательство его прямоугольности с помощью обратной теоремы Пифагора, дает основание утверждать только перпендикулярность прямой *SA* и *AD*, чего недостаточно для заключения перпендикулярности прямой *SA* и плоскости *ABCD*. Решение пункта б) отсутствует. Оценка в таком случае – 0 баллов.

2. Неверное определение искомого угла между прямой и плоскостью (неверный переход к планиметрической задаче) стало также одно из наиболее распространенных типовых ошибок при выполнении пункта б) задачи 16. Процедура определения угла между прямой и плоскостью требует особых рассуждений и дополнительных построений (проекции прямой на плоскость). Однако, многими учащимися искомый угол между прямой и плоскостью был определен интуитивно, без необходимых умозаключений, что, чаще всего, было ошибочным и сводило все решение пункта б) к 0 баллов.

Пример 2.

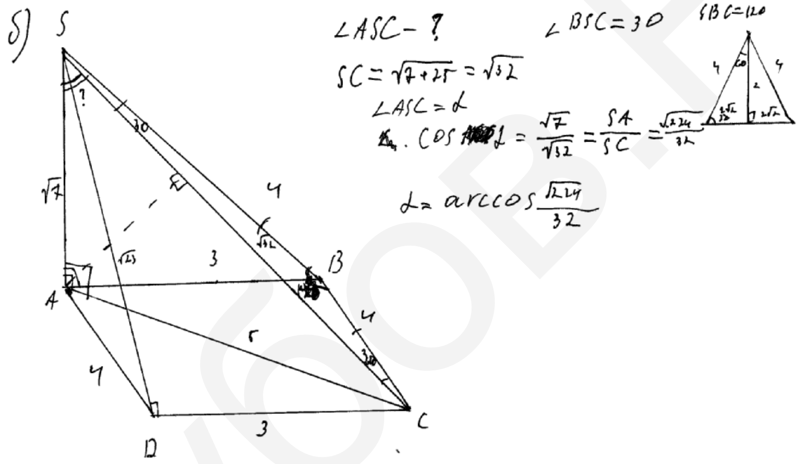


Рис.11.2.

Комментарии: Решение пункта б) задачи 16 на рисунке 11.2. оценено 0 баллов, т.к. искомый угол между прямой *SC* и плоскостью *ASB* определен неверно. Учащимся даже предпринята попытка построения искомого угла по всем правилам – проведен перпендикуляр (видимо, с целью построения проекции прямой на плоскость), но, к сожалению, не из точки *C*, а из точки *A*. Это говорит о том, что у учащегося есть некоторое общее представление об угле между прямой и плоскостью, но недостаточно полное. Часто в решениях пункта б) отсутствовали необходимые дополнительные построения искомого угла, а сам угол просто констатировался (неверно) учащимся без каких-либо пояснений. Все эти случаи сводились к 0 баллов.

3. Распространенным недостатком в решении задачи 16 было отсутствие теоретических ссылок и обоснований логических переходов. Учащиеся не указывают используемую для вывода теорию: определения, теоремы, признаки, свойства и т.д.

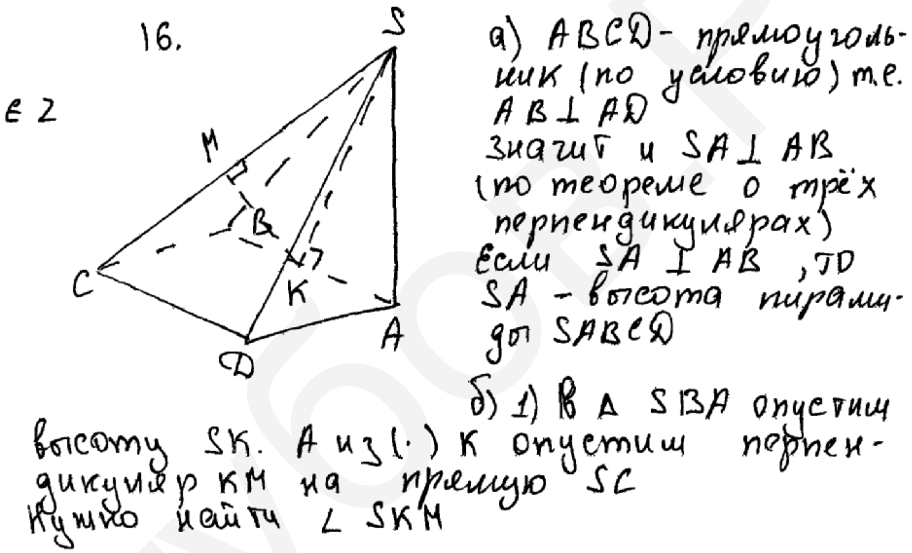


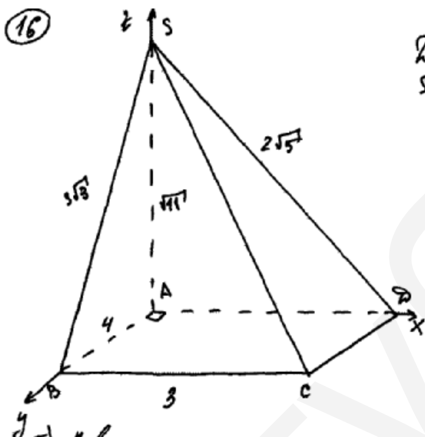
Рис.11.3.

Комментарии: В доказательстве учащимся приводятся некоторые обоснования выводов, в частности, ссылка на теорему о трех перпендикулярах, но основания для этого не приведены. Кроме того, в доказательстве обоснована перпендикулярность рассматриваемой прямой и только одной прямой плоскости, чего недостаточно использования признака перпендикулярности прямой и плоскости. Оба пункта не выполнены, оценка – 0 баллов.

Следует отметить, что по сравнению с 2015 годом при решении задачи 16 улучшилась ситуация с указанием верного ответа. В 2014 году одной из распространенных ошибок было в ответ на требование «Найдите угол между…» выписывание значения одной и тригонометрических функций, используемых в решении, что вело к потере баллов, т.к. решение признавалось незавершенным. В 2015 году таких ошибок практически не было.

Еще одним достоинством решений задачи 16 в 2015 году было активное использование учащимися нестандартных (для школьного курса геометрии) способов решения (в том числе, координатный, координатно-векторный способы). Также можно констатировать увеличение количества работ с оригинальным решением задачи 16. Приведем примеры некоторых из них.

16



Дано:
SABCD – пирам.
ABCD – прямоуг.
$AB = CD = 4$
$BC = AD = 3$
$SA = \sqrt{11}$
$SB = 3\sqrt{3}$
$SD = 2\sqrt{5}$
а) Док-ть: SA – высота пирам.
б) $\angle(SC; (ASB))$ – ?

Решение:
а) ΔSAB: $SB^2 = SA^2 + AB^2$
$9 \cdot 3 = 11 + 16$
$27 = 27$ => истина
=> ΔSAB – прямоугольный; SB – гипот; $\angle SAB = 90°$ =>
=> $SA \perp AB$
ΔSAD: $SD^2 = SA^2 + AD^2$
$4 \cdot 5 = 11 + 9$
$20 = 20$ => истина =>
=> ΔSAD – прямоугольный
SD – гипот; $\angle SAD = 90°$ =>
=> $SA \perp AD$

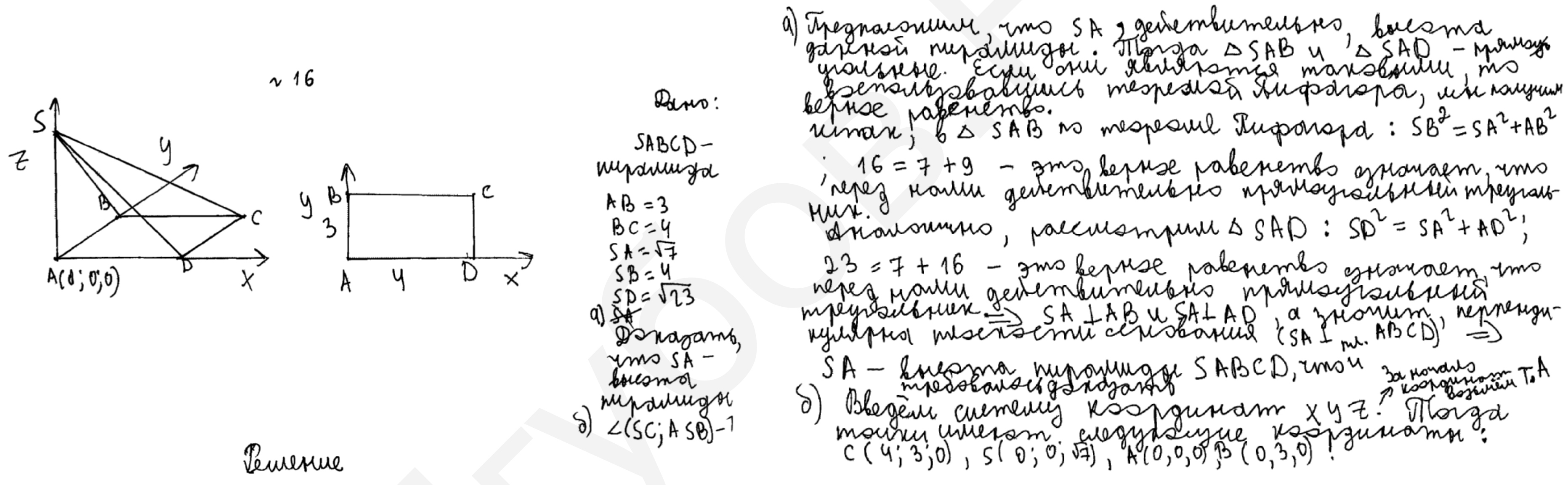
$SA \perp AD = A$
$SA \perp AB = A$
$BA \perp AD = A$
$AB \subset (ABC)$
$AD \subset (ABC)$
=> $SA \perp (ABC)$ => SA – высота пирам.

б) Введем прямоугольную систему координат ($AB \perp AD$; ~~$AS \perp AB$; $AS \perp AD$~~) ($AS \perp (ABC)$)
$A(0;0;0)$;
$S(0;0;\sqrt{11})$, $C(3;4;0)$ => $\vec{SC}\{3;4;-\sqrt{11}\}$; $|\vec{SC}| = \sqrt{9+16+11} = \sqrt{36} = 6$
$(SAB) \equiv Ozy$ => (SAB): $x = 0$ -> $\vec{n}_{SAB}\{1;0;0\}$; $|\vec{n}| = 1$
$\alpha = \angle(SC; (ASB))$
~~sin~~
$\sin\alpha = \frac{|\vec{SC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{SC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ => $\alpha = 30°$

Ответ: 30°

Рис. 11.4.

Комментарии: В решении на рисунке 11.4. угол найден с помощью координатного метода. Грамотно введен вектор $\vec{n}$. Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б). Оценка – 2 балла.


№ 16

Дано:
SABCD – пирамида
$AB = 3$
$BC = 4$
$SA = \sqrt{7}$
$SB = 4$
$SD = \sqrt{23}$
а) ~~SA~~ Доказать, что SA – высота пирамиды
б) $\angle(SC; ASB)$ – ?

Решение

а) Предположим, что SA действительно, высота данной пирамиды. Тогда $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ – прямоугольные. Если они являются таковыми, то воспользовавшись теоремой Пифагора, мы получим верное равенство.
Итак, в $\triangle SAB$ по теореме Пифагора: $SB^2 = SA^2 + AB^2$; $16 = 7 + 9$ – это верное равенство означает, что перед нами действительно прямоугольный треугольник.
Аналогично, рассмотрим $\triangle SAD$: $SD^2 = SA^2 + AD^2$; $23 = 7 + 16$ – это верное равенство означает, что перед нами действительно прямоугольный треугольник $\Rightarrow SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, а значит, перпендикулярна плоскости основания ($SA \perp$ пл. $ABCD$) $\Rightarrow$ SA – высота пирамиды SABCD, что и требовалось доказать.
б) Введём систему координат XYZ. За начало координат возьмём т. А. Тогда точки имеют следующие координаты: $C(4;3;0)$, $S(0;0;\sqrt{7})$, $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$;

Найдём уравнение плоскости через определитель:
(ASB)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \\ 0 & 3 & 0 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \end{array}$$

Уравнение плоскости ASB имеет вид: $-3\sqrt{7}x$

Найдем координаты вектора $SC: (4-0; 3-0; 0-\sqrt{7})$; $SC(4; 3; -\sqrt{7})$

Найдём $\sin(SC; ASB)$ по формуле: $\frac{|xA+yB+zC|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

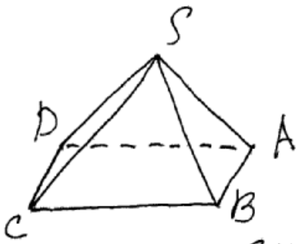
$$= \frac{|4\cdot -3\sqrt{7}|}{\sqrt{16+9+7}\cdot\sqrt{(-3\sqrt{7})^2}} = \frac{12\sqrt{7}}{\sqrt{32}\cdot 3\sqrt{7}} = \frac{12}{3\sqrt{32}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4\sqrt{32}}{32} = \frac{\sqrt{32}}{8}$$

$\angle(SC; ASB) = \arcsin\frac{\sqrt{32}}{8}$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{32}}{8}$

Рис.11.5.

Комментарии: Решение на рисунке 11.5. достаточно грамотное. Для нахождения уравнения плоскости по трем точкам учащийся демонстрирует умение работать с определителем, несвойственное школьному курсу математики. Хотя ответ не преобразован, не приведен к эталонному 450, он является правильным. Оценка – 2 балла.



Дано: $SABCD$ - пирамида

$ABCD$ - прямоугольник

$AB=3 \quad BC=4 \quad SA=\sqrt{7} \quad SD=\sqrt{23} \quad SB=4$

а) SA - высота

б) $\widehat{SC\,ASB}$

см. на обороте

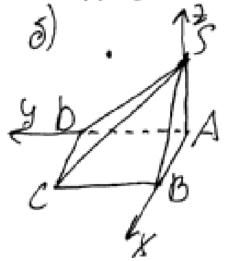
а) По теореме косинусов находим $\angle SAB$ и $\angle SAD$

$\cos\angle SAB = \frac{7+9-16}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3} = 0 \Rightarrow \angle SAB = 90^\circ$

$\cos\angle SAD = \frac{7+16-23}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 4} = 0 \Leftrightarrow \angle SAD = 90^\circ$

т.к. $\angle SAD = \angle SAB = 90^\circ$, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ - высота

б)



$A(0;0;0) \quad S(0;0;\sqrt{7})$

$C(3;4;0) \quad B(3;0;0)$

$\overline{SC}(3;4;-\sqrt{7})$

$\alpha \Rightarrow (ASB) = Ax+By+Cz+D$

$$\begin{cases} D=0 \\ \sqrt{7}C+D=0 \\ 3A+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} A=0 \\ C=0 \\ D=0 \end{matrix}$$

$\alpha = y \quad A=0 \quad B=1 \quad C=0 \quad D=0$

$n(0;1;0)$

$\sin \widehat{\overline{SC}\,(ASB)} = \left|\frac{\overline{SC}\cdot\overline{n}}{|\overline{SC}|\cdot|\overline{n}|}\right| = \frac{4}{\sqrt{9+16+7}\cdot\sqrt{1}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\widehat{\overline{SC}\,(ASB)} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

Рис. 11.6.

Комментарии: К оригинальным решениям можно отнести доказательство перпендикулярности прямой и плоскости с помощью теоремы косинусов, представленное на рисунке 11.6. Угол между прямой и плоскостью найден также нестандартным для школьного курса математики методом координат. Все рассуждения достаточно обоснованные и верные. Оценка – 2 балла.