Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика. Финальный тур 10.03.2013

7 класс

7.1. На контрольной в 7[а] было мальчиков на три человека больше, чем девочек. По результатам контрольной оказалось, что четверок было на две больше, чем пятерок, а троек – вдвое больше, чем четверок. Докажите, что кто-то получил двойку или единицу.

Решение. Пусть x – число пятерок, тогда всего положительных оценок $x+(x+2)+2(x+2)=4x+6$. С другой стороны, на контрольной было $2m+3$ человека, где m – число девочек. Поскольку числа $4x+6$ и $2m+3$ разной четности, они не совпадают, и значит, в классе были и плохие оценки.

7.2. Какое наименьшее количество цифр можно приписать справа к числу 2013, чтобы полученное число делилось на все натуральные числа, меньшие 10?

Ответ: три цифры. **Решение.** Наименьшее общее кратное чисел (1, 2, …,9) равно 2520. Если к 2013 приписать две цифры, то получится число не больше 201399. Разделив 201399 на 2520 с остатком, получим в остатке 2319. Поскольку 2319 > 99, то между числами 201300 и 201399 нет целого кратного 2520. Значит, приписать две цифры к 2013 нельзя. Очевидно, одну цифру тоже нельзя приписать (иначе можно было бы дописать справа еще ноль). Трех цифр будет достаточно; действительно, при делении 2013999 на 2520 в остатке получится 519, и поскольку 519<999, находим нужное число 2013999 – 519 = 2013480, кратное 2520.

7.3. Имеется 10 палочек длиной 1 (см), 2 (см), 2^2 (см),…, 2^9 (см). Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить равнобедренный треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение.** Предположим, от противного, что треугольник можно сложить, и пусть 2^{n_1}, 2^{n_2}, …, 2^{n_k} – длины палочек, составляющих одну боковую сторону, а 2^{m_1}, 2^{m_2}, …, 2^{m_l} – другую. Тогда имеем равенство $2^{n_1}+2^{n_2}+\ldots+2^{n_k}=2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_l}$. Пусть, для определенности, 2^{n_1} – наименьшая из длин всех этих палочек. Тогда, сократив равенство на 2^{n_1}, получим противоречие (в левой части стоит нечетное число, а в правой – четное).
Другой способ получить противоречие состоит в рассмотрении наибольшей из длин этих палочек, т.к. для любого n выполняется $2^n>1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

7.4. В ряд записано 100 чисел. Обязательно ли сумма всех данных чисел положительна, если известно, что **а**) сумма любых семи чисел положительна? **б**) сумма любых семи подряд идущих чисел положительна?

Ответ: **а**) обязательно; **б**) нет. **Решение.** **а**) Пусть $a_1, a_2 \ldots a_{100}$ – данные числа. Вычислим 100 положительных сумм $S_1=a_1+a_2+\ldots+a_7$, $S_2=a_2+a_3+\ldots+a_8$, …, $S_{100}=a_{100}+a_1+\ldots+a_6$ (складываются семерки подряд идущих чисел в циклическом расположении). Тогда $S_1+S_2+\ldots+S_{100}=7S$, где S – сумма всех чисел (т.к. каждое число засчитывается в семи семерках). Поэтому $S>0$.

б) Возьмем такие числа $a_1=a_8=a_{15}=\ldots=a_{92}=a_{99}=-6$ (каждое седьмое число равно –6) и пусть остальные числа равны 1.01. Тогда в любой семерке подряд идущих чисел сумма равна $-6+1.01\cdot 6=0.06>0$, а сумма всех 100 чисел $(-6)\cdot 15+(1.01)\cdot 85=-4.15<0$.

7.5. На шахматную доску Коля поставил 17 королей. Петя должен убрать с доски 12 королей так, чтобы оставшиеся 5 королей не били друг друга. Всегда ли он сможет это сделать? (Король бьет все клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине.)

Ответ: да. **Решение.** Раскрасим доску в 4 цвета следующим образом: разобьем доску на 16 квадратиков 2×2 и каждый такой квадратик раскрасим так

1	2
3	4

(можно раскрасить угловой квадрат, а потом параллельно переносить раскраску на другие квадраты):

1	2	1	2	…
3	4	3	4	…
1	2	1	2	…
3	4	3	4	…
…	…	…	…	…

Очевидно, любые два короля, поставленные на клетки одного цвета, не бьют друг друга. У нас 17 королей и всего 4 цвета. Значит (по принципу Дирихле или рассуждая от противного), найдутся 5 королей на клетках одного цвета. Этих королей Петя и оставит на доске.

8 класс

8.1. Докажите, что для любого натурального *n* число $n^3+9n^2+27n+35$ составное.

Решение. Представим выражение в виде $(n+3)^3+2^3=(n+5)\left((n+3)^2-2(n+3)+4\right)$ = $(n+5)(n^2+4n+7)$, и каждый множитель, очевидно, больше единицы.

8.2. Имеет ли решение в натуральных числах x, y уравнение $x^9=2013\,y^{10}$?

Ответ: да. **Решение.** Будем искать решение в виде степеней числа 2013, т.е. x=2013^m, y=2013^n. Тогда $2013^{\,9m}=2013^{\,1+10n}$, т.е. $9m-1=10n$. Можно взять m=9 (наименьшее натуральное m, для которого последняя цифра числа $9m$ равна 1), тогда n=8.

8.3. Внутри данного треугольника *ABC* постройте (с помощью циркуля и линейки) точку *M* так, чтобы площади треугольников *ABM*, *BCM* и *CAM* совпадали.

Решение. Пусть *BK* – медиана и *O* – точка пересечения медиан в треугольнике *ABC*. Тогда по свойству медиан, $OK=\frac{1}{3}BK$. Поэтому высота в треугольнике *AOC*, опущенная на *AC*, втрое меньше высоты треугольника *ABC* (это следует из подобия соответствующих прямоугольных треугольников). Значит, $S_{AOC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$. Аналогично, $S_{AOB}=S_{BOC}==\frac{1}{3}S_{ABC}$ Итак, искомая точка – это точка пересечения медиан. Заметим, что такая точка единственна: действительно, если взять другую точку M_1, то она попадет в какой-то из треугольников *AOB*, *BOC* или *AOC* – пусть, для определенности, в треугольник *AOC* – и тогда $S_{AM_1C}<S_{AOC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$. Построение с помощью циркуля и линейки точки пересечения медиан сводится к нахождению середин сторон – это стандартная задача.

8.4. В ряд записано 100 чисел. Обязательно ли сумма всех данных чисел положительна, если известно, что а) сумма любых семи чисел положительна? б) сумма любых семи подряд идущих чисел положительна?

Ответ: а) обязательно; **б**) нет. См. задачу 7.4.

8.5. На шахматную доску Коля поставил 17 королей. Петя должен убрать с доски 12 королей так, чтобы оставшиеся 5 королей не били друг друга. Всегда ли он сможет это сделать? (Король бьет все клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине.)

Ответ: да. См. задачу 7.5.

9 класс

9.1. Докажите, что уравнение $x^{99} = 2013\,y^{100}$ имеет решения в натуральных числах x, y.

Решение. См. аналогичное решение задачи 8.2. В данном уравнении можно взять $x=2013^{99}$, $y=2013^{98}$.

9.2. Число a является корнем квадратного уравнения $x^2 - x - 50 = 0$. Найдите значение $a^3 - 51a$.

Ответ: 50. **Решение.** Имеем $a^2 = a + 50$, поэтому $a^3 = a^2 + 50a = a + 50 + 50a = 51a + 50$. Отсюда $a^3 - 51a = 50$.

9.3. Из 60 чисел 1, 2, …, 60 выбрали 25 чисел. Известно, что сумма любых двух из выбранных чисел не равна 60. Докажите, что среди выбранных чисел есть кратные пяти.

Решение. Предположим противное, тогда выбранные числа находятся среди первых 48 натуральных чисел, не кратных пяти. Заметим, что среди выбранных чисел не может оказаться пара вида (a, 60–a), т.е. в каждой такой паре имеется не более одного числа среди выбранных. Поскольку таких пар всего 48:2=24<25, получаем противоречие.

9.4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ проведена медиана BM. В треугольники ABM и BCM вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с медианой BM.

Ответ: $\dfrac{|a-c|}{2}$. **Решение.** Пусть P_1, Q_1, L_1 – точки касания окружности, вписанной в треугольник ABM со сторонами AB, AM и BM соответственно. Аналогично, точки касания второй окружности со сторонами BC, MC и BM, обозначим P_2, Q_2, L_2. Требуется найти L_1L_2. Обозначим (используя свойство касательной) $AP_1 = AQ_1 = x_1$, $MQ_1 = ML_1 = y_1$, $BP_1 = BL_1 = z_1$, $CP_2 = CQ_2 = x_2$, $MQ_2 = ML_2 = y_2$, $BP_2 = BL_2 = z_2$. Имеем два равенства $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ (= BM) и $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ (т.к. M – середина AC). Складывая эти равенства, получим $2y_1 + (x_1 + z_1) = 2y_2 + (x_2 + z_2)$, т.е. $2y_1 + c = 2y_2 + a$. Значит, $L_1L_2 = |y_1 - y_2| = \dfrac{|a-c|}{2}$.

9.5. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет система уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(x,y) = 20! \\ \text{НОК}(x,y) = 30! \end{cases} \qquad (\text{где } n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)?$$

Ответ: 2^8. **Решение.** Если для данных двух чисел x, y набор их простых делителей обозначить $p_1, p_2, \cdots, p_k$ и записать $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ (где α_i, β_i – неотрицательные целые числа), то

$$\text{НОД}(x,y) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot\ldots\cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

$$\text{НОК}(x,y) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot\ldots\cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

Задача стоит так: для данных A, B найти x, y из уравнений $\text{НОД}(x,y) = A$, $\text{НОК}(x,y) = B$. Если разложения A и B имеют вид $A = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, $B = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ и $n_1 = m_1$, то $\alpha_1 = \beta_1$. Если же $n_1 < m_1$, то либо $\alpha_1 = n_1$, $\beta_1 = m_1$, либо наоборот: $\alpha_1 = m_1$, $\beta_1 = n_1$. Аналогичное рассуждение справедливо для остальных индексов. Таким образом, различные решения (x, y) определяются указанным выбором для показателей n_i, m_i в случае $n_i < m_i$ (в каждом таком случае есть выбор из двух вариантов: кому – иксу или игреку – «отдать» показатель n_i или m_i). В данной задаче для числа B=30! имеем 8 простых делителей, для которых $m_i > n_i$, а именно 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 29 (все простые числа, меньшие 30, кроме 17 и 19). Поэтому количество различных вариантов выбора упорядоченных наборов α_i, β_i равно 2^8=256.

10 класс

10.1. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $|x^2-2ax+1|=a$ имеет три корня.

Ответ: $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Решение.** Очевидно, $a\ge 0$ (поскольку левая часть уравнения неотрицательна). Если дискриминант квадратного трехчлена $D=4(a^2-1)$ отрицателен, то имеем квадратное уравнение $x^2-2ax+1=a$, и, значит, у него не более двух корней. Поэтому $D\ge 0$, т.е. $a\ge 1$, и три корня наше уравнение будет иметь, когда прямая $y=a$ касается графика $y=|x^2-2ax+1|$ в "отраженной" вершине параболы (т.е. касается графика $y=-(x^2-2ax+1)$, полученного после симметричного отражения относительно оси Ox). Вершина параболы имеет абсциссу $x=a$, значит $a=-(a^2-2a^2+1)\Leftrightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (т.к. $a\ge 1$).

10.2. Число a является корнем квадратного уравнения $x^2-x-50=0$. Найдите значение a^4-101a.

Ответ: 2550. **Решение.** Имеем $a^2=a+50$, поэтому $a^4=(a+50)^2=a^2+100a+2500=$ $a+50+100a+2500=101a+2550$. Отсюда $a^4-101a=2550$.

10.3. Дан прямоугольный треугольник ABC. На гипотенузе AC взята точка M. Пусть K, L – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM соответственно. Найдите расстояние от точки M до середины KL, если известен радиус R окружности, описанной около треугольника BKL.

Ответ: $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **Решение.** Заметим, что угол KML прямой, т.к. $\angle KML=\angle KMB+\angle LMB=$ $=\frac{1}{2}(\angle AMB+\angle CMB)=90°$. Аналогично получаем, что $\angle KBL=\frac{1}{2}\cdot 90°=45°$. Тогда в треугольнике BKL имеем $KL=2R\cdot\sin 45°=R\sqrt{2}$. Гипотенуза KL в прямоугольном треугольнике KML вдвое больше искомой медианы, откуда следует результат $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

10.4. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет система уравнений

$$\begin{cases}\text{НОД}(x,y)=20!\\ \text{НОК}(x,y)=30!\end{cases} \quad (\text{где } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)?$$

Ответ: 2^8. **Решение.** См. задачу 9.5.

10.5. Имеется 100 палочек длины 1, 0.9, $(0.9)^2$, …, $(0.9)^{99}$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить равнобедренный треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение.** Предположим, от противного, что можно сложить треугольник, и пусть 0.9^{n_1}, 0.9^{n_2}, …, 0.9^{n_k} – длины палочек, составляющих одну боковую сторону, а 0.9^{m_1}, 0.9^{m_2}, …, 0.9^{m_l} – другую. Тогда имеем равенство

$$0.9^{n_1}+0.9^{n_2}+\ldots+0.9^{n_k}=0.9^{m_1}+0.9^{m_2}+\ldots+0.9^{m_l}.$$

Пусть, для определенности, n_1 – наименьший из показателей, входящих в равенство. Тогда, сократив равенство на 0.9^{n_1}, получим, что число 0.9 является корнем многочлена, у которого старший коэффициент и свободный член равны ± 1, а остальные коэффициенты ± 1 или 0. Но это противоречит тому факту, что рациональными корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь такие числа $\frac{p}{q}$, у которых p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента.

11 класс

11.1. Решите уравнение $2\sin^2 x+1=\cos(\sqrt{2}x)$.

Ответ: x=0. **Решение.** Левая часть уравнения ≥ 1, а правая ≤ 1. Значит, уравнение равносильно системе: $\sin x=0,\ \cos\sqrt{2}x=1$. Имеем: $x=\pi n$, $\sqrt{2}x=2\pi k$ (n, k – целые). Отсюда $n=k\cdot\sqrt{2}$. Поскольку $\sqrt{2}$ – число иррациональное, последнее равенство возможно лишь при $n=k=0$.

11.2. Дано квадратное уравнение $a^3x^2+b^3x+c^3=0$, имеющее два корня. Докажите, что уравнение $a^5x^2+b^5x+c^5=0$ тоже имеет два корня.

Решение. Имеем $b^6>4a^3c^3$, т.к. квадратное уравнение имеет положительный дискриминант. Требуется доказать, что $b^{10}>4a^5c^5$. Если $ac<0$, то последнее неравенство очевидно. Если же $ac\ge 0$, то из неравенства $(b^2)^3>4(ac)^3$ в силу монотонного возрастания функции $y=x^{5/3}$ получим $(b^2)^5>4^{5/3}\cdot(ac)^5>4(ac)^5$.

11.3. Дана окружность единичного радиуса, AB – ее диаметр. Точка M движется по окружности, M_1 – ее проекция на AB. Обозначим $f(M)=AB+MM_1-AM-BM$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(M)$.

Ответ: наименьшее значение 0; наибольшее $3-2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $\angle MAB=\alpha$, $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда $f(M)=2+2\cos\alpha\sin\alpha-2\cos\alpha-2\sin\alpha$. Обозначим это выражение через $g(\alpha)$. Имеем $g'(\alpha)=2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha)=$ $=2(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$. Вторая скобка неотрицательна при всех $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, т.к. для данных α это неравенство следует из неравенства $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\ge 1$, т.е. $2\sin\alpha\cos\alpha\ge 0$. Таким образом, $g'(\alpha)=0$ при $\alpha=0$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ ($\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ – единственный корень первой скобки). Учитывая знак производной, получаем, что $g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ – наименьшее значение, а $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2+1-2\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}$ – наибольшее.

11.4. Сколько существует пифагоровых треугольников, у которых один из катетов равен 2013? (Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами. Равные треугольники засчитываются за один.).

Ответ: 13. **Решение.** Из теоремы Пифагора получаем уравнение в целых числах $2013^2+x^2=y^2 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=2013^2=3^2\cdot 11^2\cdot 61^2$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} y-x=d_1 \\ y+x=d_2 \end{cases}$, где d_1, $d_2=\dfrac{2013^2}{d_1}$ – натуральные делители числа 2013^2. Решение системы $x=\dfrac{d_2-d_1}{2}$, $y=\dfrac{d_2+d_1}{2}$ будет целочисленным, т.к. d_1 и d_2 – нечетные числа. Чтобы число x было натуральным, делитель d_2 должен быть больше d_1, т.е. $d_2>2013$, $d_1<2013$. Количество всех натуральных делителей числа 2013^2 равно (2+1)(2+1)(2+1)=27, как следует из указанного разложения 2013^2. Из этих делителей только $\dfrac{27-1}{2}=13$ удовлетворяют условию $d>2013$ (выкидываем "центральный" делитель d=2013, а остальные делители делятся на пары (d_1,d_2), где $d_1\cdot d_2=2013$, и из каждой пары выбираем $d_2>d_1$).

11.5. Имеется 100 палочек длины 1, 0.9, $(0.9)^2$, …, $(0.9)^{99}$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить равнобедренный треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение.** См. задачу 10.5.