Математика ЕГЭ 2014
(система задач из открытого банка заданий)

Задания В14

Исследование функций

Материалы подготовили:
Корянов А. Г. (г. Брянск); e-mail: akoryanov@mail.ru
Надежкина Н.В. (г. Иркутск); e-mail: nadezhkina@yahoo.com

СОДЕРЖАНИЕ

Элементы содержания, проверяемые заданиями В14: производная; исследование функций.

Проверяемые требования (умения) в заданиях В14: вычислять производные элементарных функций; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций.

Введение

Задача В14 из ЕГЭ 2013 (или В15 из ЕГЭ 2014) по математике представляет собой задание на исследование элементарных функций (рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических). Чаще всего это исследование сводится к нахождению наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке или же точек максимума (минимума) функции.

Структура пособия такова, что задачи из «открытого банка заданий», наряду с фиксированным номером из открытого банка заданий (он расположен в скобках непосредственно перед текстом задачи), имеют также собственную тройную нумерацию внутри каждого раздела. Все типы задач из «открытого банка заданий» систематизированы по содержанию. Каждый тип задачи представлен тремя задачами (первая из этих трех задач и есть прототип данного типа задач), что позволяет учащемуся при необходимости неоднократно проверить себя, а учителю - использовать дополнительные задания в виде отдельных, уже готовых трех вариантов для домашних или проверочных работ. Таким образом, первое число в тройной нумерации каждой задачи означает номер раздела, второе число – номер типа задачи внутри раздела, третье число - номер задачи внутри типа (или номер варианта).

Для первых задач каждого типа представлены подробные решения, для всех задач есть ответы.

Мы постарались сделать так, чтобы пособие было полезно и для ученика практически любого уровня подготовки, и для учителя, и для репетитора. Ответы и решения задач-прототипов представлены отдельно для того, чтобы в конкретном экземпляре пособия можно было легко оставить только нужную форму ответов или решений для проверки либо самопроверки. Например, в экземплярах пособий, предлагаемых для уверенных в своих силах учеников, можно вообще убрать и ответы, и решения. Для менее уверенных в своих силах учащихся можно оставить только решения задач-прототипов. Для учителя и репетитора необходимы как раз ответы ко всем задачам для упрощения процесса проверки и оценки домашних и самостоятельных работ.

Рассмотрим использование свойств элементарных функций для исследования сложной функции без применения производной.

1. Исследование функции без производной. Точки экстремума функции

Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках.

- Точка x_0 называется **точкой максимума** (**минимума**) функции $y = f(x)$, если функция определена в самой этой точке и в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$). Обозначение: $x_{\max}$; $x_{\min}$.
- Значение функции в этих точках называют соответственно **максимумами** и **минимумами** (экстремумами) функции. Обозначение: $y_{\max}$; $y_{\min}$.
- Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве M и имеет максимум в точке x_0, $x_0 \in M$, тогда имеют место следующие свойства:

1. Для числа $c > 0$ в точке x_0 функция $c \cdot f(x)$ имеет максимум, для числа $c < 0$ – минимум.
2. Для числа c в точке x_0 функция $f(x) + c$ имеет максимум.
3. Если $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$ на множестве M, то в точке x_0 функция $\dfrac{1}{f(x)}$ имеет минимум.
4. Если функция $g(x)$ определена на множестве M и имеет максимум в точке x_0, то в точке x_0 функция $f(x) + g(x)$ имеет максимум.
5. Если возрастающая функция $g(x)$ определена на множестве $E\big(f(x)\big)$, то в точке x_0 сложная функция $g\big(f(x)\big)$ имеет максимум.
6. Если убывающая функция $g(x)$ определена на множестве $E\big(f(x)\big)$, то в точке x_0 сложная функция $g\big(f(x)\big)$ имеет минимум.

Аналогичные свойства имеют место для минимума функции $f(x)$ на множестве M, а также для ее наименьшего и наибольшего значений.

Напомним, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $x = -\dfrac{b}{2a}$ имеет минимум (наименьшее значение) $y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, если $a > 0$; имеет максимум (наибольшее значение) $y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, если $a < 0$.

Квадратичная функция

$y = a(x-m)^2 + n$ при $x = m$ имеет минимум (наименьшее значение) n, если $a > 0$; имеет максимум (наибольшее значение) n, если $a < 0$.

Пример 1. Найдите точку минимума функции $y = \log_7(x^2 - 20x + 140) - 3$.

Решение. Квадратичная функция $p(x) = x^2 - 20x + 140$ $(a = 1; a > 0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{-20}{2\cdot 1}=10$ минимум $p(10)=10^2-20\cdot 10+140=40$. Так как функция $y=\log_7 t-3$ возрастает на $(0;+\infty)$ и $40\in(0;+\infty)$, то данная сложная функция имеет минимум в точке $x=10$.

Замечание. Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене, получим выражение $x^2-20x+100+40=(x-10)^2+40$, максимальное значение которого 40 достигается при $x=10$.

Замечание. Используя производную $y'=\dfrac{2x-20}{(x^2-20x+140)\ln 7}$, $D(y')=R$, получаем, что $y'=0$ при $x=10$, $y'>0$ при $x>10$ и $y'<0$ при $x<10$. Значит, $x=10$ – точка минимума.

Ответ: 10.

Пример 2. При каком значении m функция $y=\sqrt[3]{3-mx-5x^2}$ имеет максимум в точке $x_0=1{,}3$?

Решение. Функция $p(x)=3-mx-5x^2$ является квадратичной $(a=-5; a<0)$ и имеет точку максимума $x=-\dfrac{-m}{2\cdot(-5)}=-\dfrac{m}{10}$. Так как функция $y=\sqrt[3]{t}$ возрастает на R, то данная функция имеет максимум в точке $-\dfrac{m}{10}$. Следовательно, $-\dfrac{m}{10}=1{,}3$, откуда $m=-13$.

Ответ: –13.

***

1.1.1.(прототип 245173) Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{4-4x-x^2}$.

1.1.2.(286505) Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-79-18x-x^2}$.

1.1.3.(286603) Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-11+12x-x^2}$.

***

1.2.1.(прототип 245174) Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-6x+11}$.

1.2.2.(286607) Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+20x+104}$.

1.2.3.(286703) Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-28x+211}$.

***

1.3.1.(прототип 245177) Найдите точку максимума функции

$$y=\log_2(2+2x-x^2)-2.$$

1.3.2.(286905) Найдите точку максимума функции $y=\log_8(-40-14x-x^2)+3$.

1.3.3.(286995) Найдите точку максимума функции $y=\log_5(-19+12x-x^2)+2$.

***

1.4.1.(прототип 245178) Найдите точку минимума функции

$$y=\log_5(x^2-6x+12)+2.$$

1.4.2.(287007) Найдите точку минимума функции $y=\log_6(x^2+24x+147)+2$.

1.4.3.(287103) Найдите точку минимума функции $y=\log_9(x^2-30x+230)+5$.

***

1.5.1.(прототип 245181) Найдите точку максимума функции $y=11^{6x-x^2}$.

1.5.2.(287305) Найдите точку максимума функции $y=2^{5-8x-x^2}$.

1.5.3.(287403) Найдите точку максимума функции $y=7^{-79-20x-x^2}$.

***

1.6.1.(прототип 245182) Найдите точку минимума функции $y=7^{x^2+2x+3}$.

1.6.2.(287405) Найдите точку минимума функции $y=6^{x^2-8x+28}$.

1.6.3.(287501) Найдите точку минимума функции $y=3^{x^2+14x+71}$.

2. Исследование функции без производной
Наибольшее и наименьшее значения функции

• Число m называют **наименьшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) в X существует такая точка x_0, что $f(x_0) = m$;

2) для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$. Обозначение: $\min\limits_X y(x) = m$

• Число M называют **наибольшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) в X существует такая точка x_0, что $f(x_0) = M$;

2) для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Обозначение: $\max\limits_X y(x) = M$.

Пример 3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 10x + 754) + 3 .$$

Решение. 1-й способ. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене: $x^2 - 10x + 754 = (x-5)^2 + 729$. Так как $(x-5)^2 \ge 0$ при всех значениях $x \in R$, причем равенство достигается при $x = 5$, то имеем $(x-5)^2 + 729 \ge 729$. В силу убывания функции $y = \log_{\frac{1}{9}} t$ на промежутке $(0;+\infty)$ получаем

$$\log_{\frac{1}{9}}\left((x-5)^2 + 729\right) \le \log_{\frac{1}{9}} 729;$$

$$\log_{\frac{1}{9}}\left((x-5)^2 + 729\right) \le -3;$$

$$\log_{\frac{1}{9}}\left((x-5)^2 + 729\right) + 3 \le -3 + 3;$$

$$\log_{\frac{1}{9}}\left((x-5)^2 + 729\right) + 3 \le 0 .$$

Следовательно, данная функция при $x = 5$ принимает наибольшее значение 0.

2-й способ. Функция

$$g(x) = x^2 - 10x + 754$$

является квадратичной с положительным старшим коэффициентом и при $x = -\dfrac{-10}{2} = 5$ имеет наименьшее значение, равное $g(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 754 = 729$.

Так как $E(g) = [729; +\infty)$ и функция $y = \log_{\frac{1}{9}} t$ убывает на промежутке $(0;+\infty)$, следовательно, она принимает наибольшее значение при наименьшем значении аргумента. Отсюда получаем, что сложная функция $y = \log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 10x + 754) + 3$ при $x = 5$ принимает наибольшее значение, равное $\log_{\frac{1}{9}} 729 + 3 = -3 + 3 = 0$.

Ответ: 0.

***

2.1.1.(прототип 245175) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

2.1.2.(286707) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 185}$.

2.1.3.(286791) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 28x + 200}$.

***

2.2.1.(прототип 245176) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

2.2.2.(286805) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{168 - 22x - x^2}$.

2.2.3.(286889) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{19 + 18x - x^2}$.

***

2.3.1.(прототип 245179) Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$.

2.3.2.(287105) Найдите наименьшее значение функции
$y = \log_4(x^2 + 14x + 305) + 9$.

2.3.3.(287181) Найдите наименьшее значение функции
$y = \log_5(x^2 + 24x + 769) - 3$.

***

2.4.1.(прототип 245180) Найдите наибольшее значение функции
$$y = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3.$$

2.4.2.(287207) Найдите наибольшее значение функции $y = \log_8(503 - 6x - x^2) - 3$.

2.4.3.(287297) Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(720 + 6x - x^2) + 9$.

***

2.5.1.(прототип 245183) Найдите наименьшее значение функции
$y = 2^{x^2+2x+5}$.

2.5.2.(287509) Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2-24x+148}$.

2.5.3.(287585) Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2+28x+201}$.

***

2.6.1.(прототип 245184) Найдите наибольшее значение функции
$y = 3^{-7-6x-x^2}$.

2.6.2.(287605) Найдите наибольшее значение функции $y = 9^{-34-12x-x^2}$.

2.6.3.(287703) Найдите наибольшее значение функции $y = 4^{-99+20x-x^2}$.

<u>Производные элементарных функций</u>

1. $C' = 0,$ *где C – постоянная*

2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

а) $\left(x^3\right)' = 3x^2$

б) $\left(x^2\right)' = 2x$

в) $x' = 1$

г) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

д) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

а) $\left(3^x\right)' = 3^x \cdot \ln 3$

б) $\left(e^x\right)' = e^x$

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

а) $\left(\log_5 x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$

б) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

<u>Правила дифференцирования</u>

1) $(f + g)' = f' + g'$

2) $(f - g)' = f' - g'$

3) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

а) $(C \cdot f)' = C \cdot f',$ *где C – постоянная*

б) $(kx + b)' = k,$ *где k, b – постоянные*

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

5) $\left(f(g(x))\right)' = f'(g) \cdot g'(x)$

<u>Монотонность функции</u>

Задачи на нахождение промежутков монотонности и точек экстремума функций тесно связаны между собой.

- *Достаточное условие возрастания функции*: если в каждой точке интервала $(a;b)$ производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.
- *Достаточное условие убывания функции*: если в каждой точке интервала $(a;b)$ производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

3. Исследование функции с помощью производной

Точки экстремума функции

• *Достаточное условие экстремума функции*:

а) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

б) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, $f'(x) > 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

• Внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует, называется *критической*.

Поведение функции при ее исследовании с помощью производной проиллюстрируем таблицами.

$(a;b)$	$(a;x_0)$	x_0	$(x_0;b)$
$f'(x)$	+	равна 0 или не существует	–
$f(x)$	возрастает	непрерывна $f_{\max}(x) = f(x_0)$	убывает

$(a;b)$	$(a;x_0)$	x_0	$(x_0;b)$
$f'(x)$	–	равна 0 или не существует	+
$f(x)$	убывает	непрерывна $f_{\min}(x) = f(x_0)$	возрастает

• *Второе достаточное условие экстремума функции*. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную $f''(x)$. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$.

Отметим два способа решения задач на нахождение точек экстремума функции: применение первой производной или применение второй производной.

<u>Целые рациональные функции</u>

Пример 4. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. 1-й способ (использование первой производной).

1) Область определения функции $D(y) = R$.

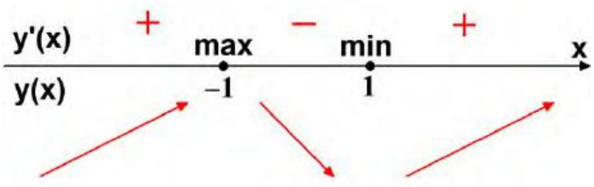
2) Находим производную функции $y' = 3x^2 - 3$; $D(y') = R$.

3) Решаем уравнение $y' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$. Корни уравнения (и критические точки функции): –1 и 1.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1;1)$ и $(1;+\infty)$. Например, $y'(0) = -3 < 0$. Ставим знак «–» на интервале $(-1;1)$. На остальных интервалах расставляем знаки, используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок). С помощью стрелок указываем характер монотонности функции y.

При переходе через критическую точку $x = -1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x = -1$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 1$ – точка минимума.



2-й способ (использование второй производной).

1) $D(y) = R$.

2) $y'(x) = 3x^2 - 3$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$. Корни уравнения (и критические точки функции): –1 и 1.

4) Найдем вторую производную и вычислим значения при $x = -1$ и при $x = 1$: $y''(x) = 6x$; $y''(-1) = -6$; $y''(1) = 6$. Так как $y''(-1) < 0$, то $x = -1$ – точка максимума данной функции. Так как $y''(1) > 0$, то $x = 1$ – точка минимума данной функции.

Ответ: –1.

***

3.1.1.(прототип 77419) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

3.1.2.(124217) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 192x + 14$.

3.1.3.(124259) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 243x + 11$.

***

3.2.1.(прототип 77420) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

3.2.2.(124267) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 243x + 14$.

3.2.3.(124315) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 192x + 5$.

***

3.3.1.(прототип 77435) Найдите точку максимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

3.3.2.(127137) Найдите точку максимума функции $y = -15 + 300x - x^3$.

3.3.3.(127185) Найдите точку максимума функции $y = 3 + 147x - x^3$.

***

3.4.1.(прототип 77436) Найдите точку минимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

3.4.2.(127189) Найдите точку минимума функции $y = 13 + 75x - x^3$.

3.4.3.(127225) Найдите точку минимума функции $y = -15 + 300x - x^3$.

***

3.5.1.(прототип 77423) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

3.5.2.(124417) Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 15x^2 + 17$.

3.5.3.(124515) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 24x^2 + 15$.

***

3.6.1.(прототип 77424) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

3.6.2.(124517) Найдите точку минимума функции $y = x^3 + 30x^2 + 17$.

3.6.3.(124611) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 21x^2 + 17$.

***

3.7.1.(прототип 77427) Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

3.7.2.(124817) Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 20x^2 + 100x + 23$.

3.7.3.(124895) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x + 30$.

***

3.8.1.(прототип 77428) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

3.8.2.(124897) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 7$.

3.8.3.(124957) Найдите точку минимума функции $y = x^3 + 12x^2 + 36x + 51$.

***

3.9.1.(прототип 77431) Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$.

3.9.2.(125137) Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 6{,}5x^2 - 30x - 23$.

3.9.3.(125629) Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 17{,}5x^2 + 50x + 18$.

***

3.10.1.(прототип 77432) Найдите точку минимума функции $y = x^3 + 5x^2 + 7x - 5$.

3.10.2.(125637) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 13x^2 - 9x + 2$.

3.10.3.(126133) Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 4,5x^2 - 54x - 12$.

***

3.11.1.(прототип 77439) Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

3.11.2.(127337) Найдите точку максимума функции $y = -19,5x^2 - x^3 + 99$.

3.11.3.(127433) Найдите точку максимума функции $y = 16,5x^2 - x^3 + 5$.

***

3.12.1.(прототип 77440) Найдите точку минимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

3.12.2.(127437) Найдите точку минимума функции $y = 13,5x^2 - x^3 + 17$.

3.12.3.(127531) Найдите точку минимума функции $y = -15x^2 - x^3 + 57$.

***

3.13.1.(прототип 77443) Найдите точку максимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.

3.13.2.(127735) Найдите точку максимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 36x + 14$.

3.13.3.(127739) Найдите точку максимума функции $y = \frac{x^3}{3} - x + 23$.

***

3.14.1.(прототип 77444) Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.

3.14.2.(127785) Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 16x + 23$.

3.14.3.(127791) Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 25x + 5$.

***

3.15.1.(прототип 77447) Найдите точку максимума функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$.

3.15.2.(127895) Найдите точку максимума функции $y = 11 + 49x - \frac{x^3}{3}$.

3.15.3.(127897) Найдите точку максимума функции $y = 11 + 25x - \frac{x^3}{3}$.

***

3.16.1.(прототип 77448) Найдите точку минимума функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$.

3.16.2.(127945) Найдите точку минимума функции $y = 23 + 100x - \frac{x^3}{3}$.

3.16.3.(127947) Найдите точку минимума функции $y = 19 + x - \frac{x^3}{3}$.

***

3.17.1.(прототип 282859) Найдите точку максимума функции

$$y = (x-2)^2(x-4) + 5.$$

3.17.2.(283827) Найдите точку максимума функции $y = (x-3)^2(x+3) - 4$.

3.17.3.(283831) Найдите точку максимума функции $y = (x+9)^2(x-2) - 3$.

***

3.18.1.(прототип 282860) Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$.

3.18.2.(283929) Найдите точку минимума функции $y = (x-8)^2(x-3) - 2$.

3.18.3.(284025) Найдите точку минимума функции $y = (x-7)^2(x+6) + 3$.

Дробные рациональные функции

Пример 5. Найдите точку максимума функции $y = \frac{2x^2 + 242}{x} + 15$.

Решение. 1-й способ (использование первой производной).

1) В дроби выделим целую часть: $y = 2x + \dfrac{242}{x} + 15$. Область определения функции $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

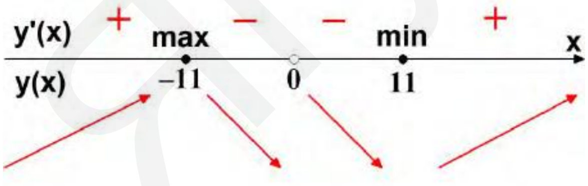
2) Находим производную функции $y' = 2 - \dfrac{242}{x^2}$; $y' = \dfrac{2x^2 - 242}{x^2}$.
$D(y') = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3) Решаем уравнение $y' = 0$.
$$\frac{2x^2 - 242}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 242 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -11, \\ x = 11. \end{array} \right.$$
Корни уравнения (и критические точки функции): –11 и 11.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из интервалов $(-\infty; -11)$, $(-11; 0)$, $(0; 11)$ и $(11; +\infty)$. Например, $y'(1) < 0$. Ставим знак «–» на интервале $(0; 11)$. На остальных интервалах расставляем знаки, используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок). С помощью стрелок указываем характер монотонности функции y.

При переходе через критическую точку $x = -11$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x = -11$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x = 11$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 11$ – точка минимума.



2-й способ (использование второй производной).

1) $y = 2x + \dfrac{242}{x} + 15$.
$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) $y' = 2 - \dfrac{242}{x^2}$; $y' = \dfrac{2x^2 - 242}{x^2}$.
$D(y') = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3) $y' = 0$.
$$\frac{2x^2 - 242}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 242 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -11, \\ x = 11. \end{array} \right.$$

4) Найдем вторую производную и вычислим значения при $x = -11$ и при $x = 11$: $y'' = \dfrac{484}{x^3}$; $y''(-11) < 0$; $y''(11) > 0$. Отсюда следует, что $x = -11$ – точка максимума, а $x = 11$ – точка минимума данной функции.

Ответ: –11.

***

3.19.1.(прототип 77471) Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{16}{x} + x + 3$.

3.19.2.(129963) Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{49}{x} + x + 11$.

3.19.3.(130001) Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{648}{x} + 2x + 19$.

***

3.20.1.(прототип 77472) Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{25}{x} + x + 25$.

3.20.2.(130013) Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{841}{x} + x + 14$.

3.20.3.(130055) Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{722}{x} + 2x + 14$.

***

3.21.1.(прототип 77500) Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 289}$.

3.21.2.(132669) Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 144}$.

3.21.3.(132671) Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 729}$.

***

3.22.1.(прототип 77501) Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 1}$.

3.22.2.(132699) Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+676}$.

3.22.3.(132701) Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+64}$.

***

3.23.1.(прототип 77467) Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x^2+289}{x}$.

3.23.2.(129843) Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x^2+121}{x}$.

3.23.3.(129871) Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x^2+324}{x}$.

***

3.24.1.(прототип 77468) Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x^2+1}{x}$.

3.24.2.(129873) Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x^2+36}{x}$.

3.24.3.(129901) Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x^2+676}{x}$.

Функции, содержащие степенные и иррациональные выражения

Пример 6. Найдите точку минимума функции $y=\dfrac{4}{3}x\sqrt{x}-7x+6$.

Решение. 1-й способ (использование первой производной).

1) Область определения функции $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-7x+6$.

2) Находим производную функции $y'=2x^{\frac{1}{2}}-7$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) Решаем уравнение $y'=0$; $2\sqrt{x}-7=0$; $\sqrt{x}=3,5$. Корень уравнения (и критическая точка функции): 12,25.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[0;12,25)$ и $(12,25;+\infty)$. Например, $y'(0)<0$, $y'(16)>0$. Ставим знак «–» на промежутке $[0;12,25)$, знак «+» на интервале $(12,25;+\infty)$. С помощью стрелок указываем характер монотонности функции y (см. рисунок).

При переходе через критическую точку $x=12,25$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=12,25$ – точка минимума.

2-й способ (использование второй производной).

1) $y=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-7x+6$. $D(y)=[0;+\infty)$.

2) $y'=2x^{\frac{1}{2}}-7$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $2\sqrt{x}-7=0$; $\sqrt{x}=3,5$.

4) Найдем вторую производную и определим ее знак при $x=12,25$: $y''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

$y''(12,25)=\dfrac{1}{\sqrt{12,25}}>0$. Отсюда следует, что $x=12,25$ – точка минимума данной функции.

Ответ: 12,25.

***

3.25.1.(прототип 77451) Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$.

3.25.2.(128055) Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-6x+9$.

3.25.3.(128057) Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-21x+5$.

***

3.26.1.(прототип 77455) Найдите точку максимума функции $y=7+6x-2x^{\frac{3}{2}}$.

3.26.2.(128355) Найдите точку максимума функции $y=2+3x-2x^{\frac{3}{2}}$.

3.26.3.(128357) Найдите точку максимума функции $y=6+12x-2x^{\frac{3}{2}}$.

***

3.27.1.(прототип 77453) Найдите точку минимума функции $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+1$.

3.27.2.(128155) Найдите точку минимума функции $y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+15$.

3.27.3.(128157) Найдите точку минимума функции $y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-8x+55$.

***

3.28.1.(прототип 77457) Найдите точку максимума функции $y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$.

3.28.2.(128649) Найдите точку максимума функции $y=-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+11x+14$.

3.28.3.(128793) Найдите точку максимума функции $y=-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+5x+14$.

***

3.29.1.(прототип 77461) Найдите точку минимума функции $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1$.

3.29.2.(129049) Найдите точку минимума функции $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8x+6$.

3.29.3.(129051) Найдите точку минимума функции $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-10x$.

***

3.30.1.(прототип 77465) Найдите точку максимума функции $y=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+3x+1$.

3.30.2.(129543) Найдите точку максимума функции $y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+10x+13$.

3.30.3.(129545) Найдите точку максимума функции $y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+7x+18$.

***

3.31.1.(прототип 77459) Найдите точку минимума функции $y=x\sqrt{x}-3x+1$.

3.31.2.(128951) Найдите точку минимума функции $y=x\sqrt{x}-15x+5$.

3.31.3.(128995) Найдите точку минимума функции $y=x\sqrt{x}-30x+26$.

***

3.32.1.(прототип 77463) Найдите точку максимума функции $y=7+6x-2x\sqrt{x}$.

3.32.2.(129251) Найдите точку максимума функции $y=4+9x-4x\sqrt{x}$.

3.32.3.(129389) Найдите точку максимума функции $y=17+15x-x\sqrt{x}$.

Функции, содержащие показательные выражения

Пример 7. Найдите точку максимума функции $y=(x+5)^2e^{9-x}$.

Решение. 1-й способ (использование первой производной).

1) Область определения функции $D(y)=R$. Представим функцию в виде $y=(x^2+10x+25)e^{9-x}$.

2) Находим производную функции

$$y'=(x^2+10x+25)'e^{9-x}+(x+5)^2\left(e^{9-x}\right)';$$

$$y'=(2x+10)e^{9-x}-(x^2+10x+25)e^{9-x};$$

$$y'=e^{9-x}(-x^2-8x-15).$$

$D(y')=R$.

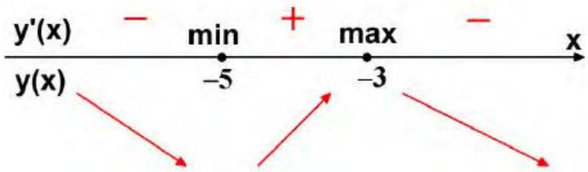
3) Решаем уравнение $y'=0$; $e^{9-x}(-x^2-8x-15)=0$. Так как $e^{9-x}>0$ при $x\in R$, то из уравнения $x^2+8x+15=0$ получаем корни (и критические точки функции): –5 и –3.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из интервалов $(-\infty;-5)$, $(-5;-3)$

и $(-3;+\infty)$. Например, $y'(0)<0$. Ставим знак «–» на интервале $(-3;+\infty)$. На остальных интервалах расставляем знаки, используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок). С помощью стрелок указываем характер монотонности функции y.

При переходе через критическую точку $x=-5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=-5$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-3$ – точка максимума.



2-й способ (использование второй производной).

1) $y=(x^2+10x+25)e^{9-x}$. $D(y)=R$.

2) $y'=e^{9-x}(-x^2-8x-15)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{9-x}(-x^2-8x-15)=0$. Корни уравнения (и критические точки функции): –5 и –3.

4) Найдем вторую производную и вычислим значения при $x=-5$ и при $x=-3$: $y''(x)=e^{9-x}(x^2+6x+7)$; $y''(-5)=2e^{14}$; $y''(-3)=-2e^{12}$. Так как $y''(-3)<0$, то $x=-3$ – точка максимума данной функции. Так как $y''(-5)>0$, то $x=-5$ – точка минимума данной функции.

Ответ: –3.

***

3.33.1.(прототип 26710) Найдите точку минимума функции $y=(x+16)e^{x-16}$.

3.33.2.(3775) Найдите точку минимума функции $y=(x+18)e^{x-18}$.

3.33.3.(70837) Найдите точку минимума функции $y=(x+54)e^{x-54}$.

***

3.34.1.(прототип 26711) Найдите точку максимума функции $y=(9-x)e^{x+9}$.

3.34.2.(3793) Найдите точку максимума функции $y=(11-x)e^{x+11}$.

3.34.3.(70887) Найдите точку максимума функции $y=(60-x)e^{x+60}$.

***

3.35.1.(прототип 26712) Найдите точку минимума функции $y=(3-x)e^{3-x}$.

3.35.2.(3815) Найдите точку минимума функции $y=(16-x)e^{16-x}$.

3.35.3.(70937) Найдите точку минимума функции $y=(73-x)e^{73-x}$.

***

3.36.1.(прототип 26713) Найдите точку максимума функции $y=(x+16)e^{16-x}$.

3.36.2.(3831) Найдите точку максимума функции $y=(x+17)e^{17-x}$.

3.36.3.(70987) Найдите точку максимума функции $y=(x+39)e^{39-x}$.

***

3.37.1.(прототип 26723) Найдите точку минимума функции

$$y=(3x^2-36x+36)e^{x-36}.$$

3.37.2.(4005) Найдите точку минимума функции $y=(3x^2-15x+15)e^{x-15}$.

3.37.3.(71327) Найдите точку минимума функции $y=(5x^2-35x+35)e^{x-7}$.

***

3.38.1.(прототип 26724) Найдите точку максимума функции

$$y=(3x^2-36x+36)e^{x+36}.$$

3.38.2.(4025) Найдите точку максимума функции $y=(2x^2-32x+32)e^{x+32}$.

3.38.3.(71393) Найдите точку максимума функции $y=(4x^2-12x+12)e^{x+8}$.

***

3.39.1.(прототип 26732) Найдите точку минимума функции $y=(x^2-8x+8)e^{6-x}$.

3.39.2.(4045) Найдите точку минимума функции $y=(x^2-5x+5)e^{7-x}$.

3.39.3.(71835) Найдите точку минимума функции $y=(4x^2-28x+28)e^{17-x}$.

***

3.40.1.(прототип 26725) Найдите точку максимума функции

$$y=(x^2-10x+10)e^{5-x}.$$

3.40.2.(4065) Найдите точку максимума функции $y=(3x^2-15x+15)e^{7-x}$.

3.40.3.(71465) Найдите точку максимума функции $y=(4x^2-32x+32)e^{11-x}$.

***

3.41.1.(прототип 26726) Найдите точку максимума функции $y=(x-2)^2e^{x-6}$.

3.41.2.(4085) Найдите точку максимума функции $y=(x-7)^2e^{x-8}$.

3.41.3.(71531) Найдите точку максимума функции $y=(x+13)^2e^{x-15}$.

***

3.42.1.(прототип 26727) Найдите точку минимума функции $y=(x-2)^2e^{x-5}$.

3.42.2.(4103) Найдите точку минимума функции $y=(x-7)^2e^{x-4}$.

3.42.3.(71569) Найдите точку минимума функции $y=(x+14)^2e^{x-31}$.

***

3.43.1.(прототип 26728) Найдите точку максимума функции $y=(x+6)^2e^{4-x}$.

3.43.2.(4123) Найдите точку максимума функции $y=(x+5)^2e^{7-x}$.

3.43.3.(71603) Найдите точку максимума функции $y=(x-7)^2e^{37-x}$.

***

3.44.1.(прототип 26729) Найдите точку минимума функции $y=(x+3)^2e^{2-x}$.

3.44.2.(4149) Найдите точку минимума функции $y=(x+8)^2e^{8-x}$.

3.44.3.(71635) Найдите точку минимума функции $y=(x-13)^2e^{32-x}$.

<u>Функции, содержащие логарифмические выражения</u>

Пример 8. Найдите точку минимума функции $y=9x-\ln(x+5)^9+2$.

Решение. 1-й способ (использование первой производной).

1) Область определения функции $D(y)=(-5;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=9x-9\ln(x+5)+2$.

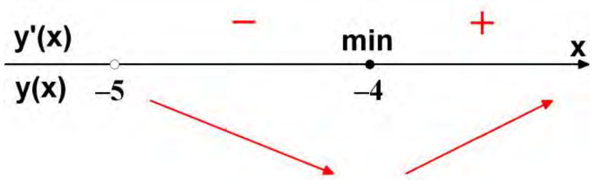
2) Находим производную функции $y'=9-\dfrac{9}{x+5}$; $y'=\dfrac{9(x+4)}{x+5}$.
$D(y')=(-5;+\infty)$.

3) Решаем уравнение $y'=0$ с учетом $D(y')$.

$$\begin{cases}\dfrac{9(x+4)}{x+5}=0\\ x>-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4=0,\\ x>-5.\end{cases} \Leftrightarrow x=-4$$

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $(-5;-4)$ и $(-4;+\infty)$. Например, $y'(0)>0$. Ставим знак «+» на интервале $(-4;+\infty)$. На интервале $(-5;-4)$ ставим знак «–», используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок). С помощью стрелок указываем характер монотонности функции y.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=-4$ – точка минимума.



2-й способ (использование второй производной).

1) $y=9x-9\ln(x+5)+2$. $D(y)=(-5;+\infty)$.

2) $y'=9-\dfrac{9}{x+5}$; $y'=\dfrac{9(x+4)}{x+5}$.
$D(y')=(-5;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases} \dfrac{9(x+4)}{x+5}=0 \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0, \\ x>-5. \end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$$

4) Найдем вторую производную и определим ее знак при $x=-4$: так как $y'=9-\dfrac{9}{x+5}$, то $y''(x)=\dfrac{9}{(x+5)^2}$; $y''(-4)=9>0$. Отсюда следует, что $x=-4$ – точка минимума данной функции.

Ответ: –4.

***

3.45.1.(прототип 26734) Найдите точку минимума функции $y=2x-\ln(x+3)+7$.

3.45.2.(4283) Найдите точку минимума функции $y=4x-\ln(x+11)+12$.

3.45.3.(4291) Найдите точку минимума функции $y=10x-\ln(x+9)+6$.

***

3.46.1.(прототип 26722) Найдите точку максимума функции

$$y=\ln(x+5)-2x+9.$$

3.46.2.(4307) Найдите точку максимума функции $y=\ln(x-11)-5x+2$.

3.46.3.(4321) Найдите точку максимума функции $y=\ln(x-7)-2x+3$.

***

3.47.1.(прототип 77488) Найдите точку минимума функции

$$y=4x-4\ln(x+7)+6.$$

3.47.2.(130977) Найдите точку минимума функции $y=7x-7\ln(x+9)+6$.

3.47.3.(130979) Найдите точку минимума функции $y=9x-9\ln(x+5)+2$.

***

3.48.1.(прототип 77489) Найдите точку максимума функции

$$y=8\ln(x+7)-8x+3.$$

3.48.2.(131027) Найдите точку максимума функции $y=3\ln(x+6)-3x+6$.

3.48.3.(131029) Найдите точку максимума функции $y=4\ln(x+4)-4x+8$.

***

3.49.1.(прототип 77486) Найдите точку минимума функции $y=3x-\ln(x+3)^3$.

3.49.2.(130853) Найдите точку минимума функции $y=2x-\ln(x+8)^2$.

3.49.3.(130855) Найдите точку минимума функции $y=7x-\ln(x+4)^7+8$.

***

3.50.1.(прототип 77487) Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)^5-5x$.

3.50.2.(130915) Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+24)^{11}-11x+9$.

3.50.3.(130975) Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+9)^7-7x+6$.

***

3.51.1.(прототип 77491) Найдите точку минимума функции

$$y=2x^2-5x+\ln x-3.$$

3.51.2.(131577) Найдите точку минимума функции $y=0{,}5x^2-16x+63\ln x-2$.

3.51.3.(132075) Найдите точку минимума функции $y=1{,}5x^2-45x+162\ln x-9$.

***

3.52.1.(прототип 77490) Найдите точку максимума функции

$$y=2x^2-13x+9\ln x+8.$$

3.52.2.(131077) Найдите точку максимума функции $y=1{,}5x^2-27x+54\ln x+4$.

3.52.3.(131079) Найдите точку максимума функции $y=x^2-18x+40\ln x+1$.

Функции, содержащие тригонометрические выражения

Пример 9. Найдите точку минимума функции

$$y=(1-2x)\cos x+2\sin x+5,$$

принадлежащую промежутку $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. 1-й способ (использование первой производной).

1) Область определения функции $D(y)=R$.

2) Находим производную функции

$y' = (1-2x)'\cos x + (1-2x)(\cos x)' + 2\cos x$;

$y' = -2\cos x - (1-2x)\sin x + 2\cos x$;

$y' = (2x-1)\sin x$.

$D(y') = R$.

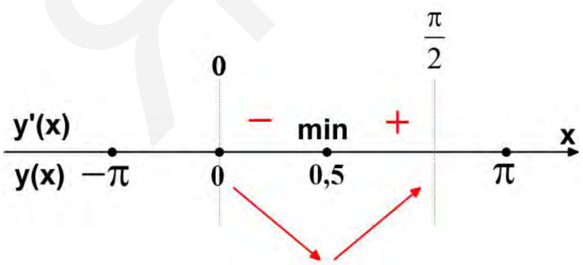
3) Решаем уравнение $y' = 0$; $(2x-1)\sin x = 0$; $x = 0,5$ или $x = \pi n,\ n \in Z$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ данная функция имеет одну критическую точку $x = 0,5$.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $(0; 0,5)$ и $\left(0,5; \frac{\pi}{2}\right)$. Например,

$y'(0,4) = -0,2\sin 0,4 < 0$. На интервале $(0; 0,5)$ ставим знак «–». На интервале $\left(0,5; \frac{\pi}{2}\right)$ ставим знак «+», используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок). С помощью стрелок указываем характер монотонности функции y.

При переходе через критическую точку $x = 0,5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x = 0,5$ – точка минимума.

Замечание. Так как на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ значения $\sin x > 0$, то знак производной зависит от знака множителя $2x-1$.



2-й способ (использование второй производной).

1) $D(y) = R$.

2) $y' = (2x-1)\sin x$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $(2x-1)\sin x = 0$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ единственный корень (критическая точка функции) $x = 0,5$.

4) Найдем вторую производную и определим ее знак при $x = 0,5$:

$y'' = 2\sin x + (2x-1)\cos x$;

$y''(0,5) = 2\sin 0,5 > 0$. Отсюда следует, что $x = 0,5$ – точка минимума данной функции.

Ответ: 0,5.

***

3.53.1.(прототип 77492) Найдите точку максимума функции

$$y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.53.2.(132083) Найдите точку максимума функции $y = (4x-6)\cos x - 4\sin x + 10$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.53.3.(132121) Найдите точку максимума функции $y = (2x-1)\cos x - 2\sin x + 3$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

***

3.54.1.(прототип 77493) Найдите точку минимума функции

$y = (0,5-x)\cos x + \sin x$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.54.2.(132123) Найдите точку минимума функции $y = (6-4x)\cos x + 4\sin x + 1$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.54.3.(132125) Найдите точку минимума функции $y = (3-2x)\cos x + 2\sin x + 7$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Исследование функции с помощью производной

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

- Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Стандартный способ (или алгоритм) нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке заключается в вычислении ее значений на концах отрезка и в критических точках внутри отрезка с последующим выбором наибольшего и наименьшего из них.

Однако бывает полезно применять следующие утверждения:

1. Если непрерывная функция возрастает на отрезке, то она принимает наибольшее значение на правом конце отрезка, а наименьшее – на левом.

2. Если непрерывная функция убывает на отрезке, то она принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, а наименьшее – на правом.

3. Если функция непрерывна на интервале $(a;b)$ и имеет на этом интервале единственный экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции на интервале $(a;b)$.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и имеет на этом интервале единственную критическую точку x_0. Тогда:

а) если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то точка x_0 есть точка минимума, в которой достигается наименьшее значение функции на интервале $(a;b)$;

б) если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то точка x_0 есть точка максимума, в которой достигается наибольшее значение функции на интервале $(a;b)$.

Выделим три вида задач данного типа: данный отрезок не содержит критических точек данной функции, содержит одну критическую точку, содержит более одной критической точки. Отметим два способа решения этих задач: применение алгоритма или исследование промежутков знакопостоянства производной функции.

<u>Целые рациональные функции</u>

Пример 10. Найдите наименьшее значение функции $y=x^4-8x^2-9$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y)=R$.

2) $y'=4x^3-16x$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $4x^3-16x=0$; $4x(x^2-4)=0$.

Корни уравнения: –2; 0; 2. Критические точки функции на отрезке $[-1;3]$: 0; 2.

4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-1;3]$:

$$y(-1)=(-1)^4-8(-1)^2-9=-16;$$
$$y(0)=0^4-8\cdot 0^2-9=-9;$$
$$y(2)=2^4-8\cdot 2^2-9=-25;$$
$$y(3)=3^4-8\cdot 3^2-9=0.$$

Следовательно, $\min\limits_{[-1;3]} y(x)=y(2)=-25$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $D(y)=R$.

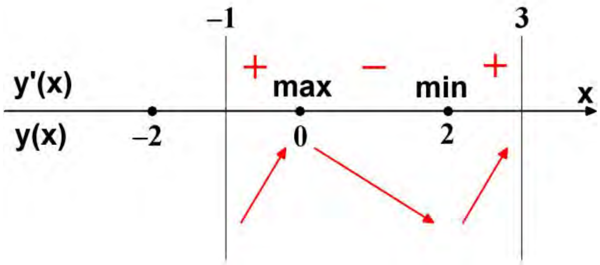
2) $y'=4x^3-16x$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $4x^3-16x=0$; $4x(x^2-4)=0$.

Корни уравнения: –2; 0; 2. Критические точки функции на промежутке $[-1;3]$: 0; 2.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-1;0)$, $(0;2)$ и $(2;3]$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=0$ – точка максимума (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции может достигаться при $x=-1$ или при $x=2$. Так как $y(-1)=-16$ и $y(2)=-25$, то $\min\limits_{[-1;3]} y(x)=y(2)=-25$.

Замечание. Используя вторую производную $y''=12x^2-16$, определяем также, что $y''(0)=-16<0$ и $x=0$ – точка максимума функции, $y''(2)=32>0$ и $x=2$ – точка минимума функции.

Ответ: –25.

Пример 11. Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+10x^2+25x+17$ на отрезке $[-15;-4,5]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2+20x+25$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2+20x+25=0$. Корни уравнения: -5; $-\frac{5}{3}$. На промежутке $[-15;-4,5]$ одна критическая точка –5.

4) Значения функции в критической точке и на концах отрезка $[-15;-4,5]$:

$$y(-15)=-1483;\ y(-5)=17;$$
$$y(-4,5)=15,875.$$

Следовательно, $\max\limits_{[-15;-4,5]} y(x)=y(-5)=17$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

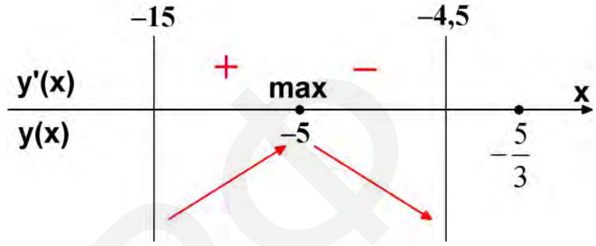
1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2+20x+25$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2+20x+25=0$. Корни уравнения: -5; $-\frac{5}{3}$. На промежутке $[-15;-4,5]$ одна критическая точка –5.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-15;-5)$ и $(-5;-4,5]$.

При переходе через критическую точку $x=-5$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=-5$ – точка максимума функции (см. рисунок).



Наибольшее значение функции на отрезке $[-15;-4,5]$ достигается в точке $x=-5$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max\limits_{[-15;-4,5]} y(x)=y(-5)=17.$$

Замечание. Используя вторую производную $y''=6x+20$, определяем также, что $y''(-5)=-10<0$ и $x=-5$ – точка максимума функции.

Ответ: 17.

Пример 12. Найдите наименьшее значение функции $y=3-2x^2-x^4$ на отрезке $[1;2]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y)=R$.

2) $y'=-4x-4x^3$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $-4x-4x^3=0$; $-4x(1+x^2)=0$.

Корень уравнения: 0. Функция не имеет критических точек на отрезке $[1;2]$.

4) Значения функции на концах отрезка $[1;2]$:

$$y(1)=3-2-1=0;$$
$$y(2)=3-8-16=-21.$$

Следовательно, $\min\limits_{[1;2]} y(x)=y(2)=-21$.

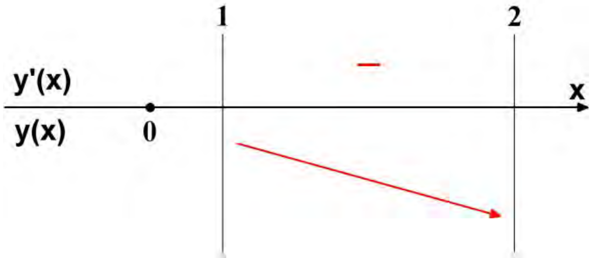
2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $D(y)=R$.

2) $y'=-4x-4x^3$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $-4x-4x^3=0$; $-4x(1+x^2)=0$.
Корень уравнения: 0.
4) Функция не имеет критических точек на отрезке $[1;2]$. Производная на отрезке $[1;2]$ имеет постоянный знак. Так как $y'(1,5)<0$, то функция убывает на отрезке $[1;2]$ и достигает наименьшего значения при $x=2$.

Получаем $\min\limits_{[1;2]} y(x)=y(2)=-21$.



Ответ: -21.

***

4.1.1.(прототип 77421) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-27x$ на отрезке $[0;4]$.
4.1.2.(124317) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-3x+23$ на отрезке $[0;2]$.
4.1.3.(124365) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-147x+19$ на отрезке $[0;8]$.

***

4.2.1.(прототип 77422) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-3x+4$ на отрезке $[-2;0]$.
4.2.2.(124367) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-147x+11$ на отрезке $[-8;0]$.
4.2.3.(124409) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-48x+23$ на отрезке $[-5;0]$.

***

4.3.1.(прототип 77425) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-3x^2+2$ на отрезке $[1;4]$.
4.3.2.(124617) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3+9x^2+15$ на отрезке $[-1,5;1,5]$.
4.3.3.(124707) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-27x^2+19$ на отрезке $[9;27]$.

***

4.4.1.(прототип 77426) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-6x^2$ на отрезке $[-3;3]$.
4.4.2.(124719) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+9x^2+19$ на отрезке $[-9;-3]$.
4.4.3.(124795) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+18x^2+17$ на отрезке $[-18;-6]$.

***

4.5.1.(прототип 77429) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-2x^2+x+3$ на отрезке $[1;4]$.
4.5.2.(124979) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3+18x^2+81x+44$ на отрезке $[-7;0]$.
4.5.3.(125055) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3+12x^2+36x+88$ на отрезке $[-5;-0,5]$.

***

4.6.1.(прототип 77430) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+2x^2+x+3$ на отрезке $[-4;-1]$.
4.6.2.(125059) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-6x^2+9x+10$ на отрезке $[0;2]$.
4.6.3.(125135) Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-18x^2+81x+5$ на отрезке $[0,5;7]$.

***

4.7.1.(прототип 77433) Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-x^2-40x+3$ на отрезке $[0;4]$.

4.7.2.(126137) Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 19{,}5x^2 + 90x + 22$ на отрезке $[8;13]$.

4.7.3.(126631) Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 5x^2 + 7x - 5$ на отрезке $[-2;1]$.

***

4.8.1.(прототип 77434) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ на отрезке $[-2;0]$.

4.8.2.(126639) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 5x^2 + 8x + 12$ на отрезке $[-4;1]$.

4.8.3.(127135) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 11x^2 - 80x$ на отрезке $[-17;-8]$.

***

4.9.1.(прототип 77437) Найдите наименьшее значение функции $y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке $[-2;2]$.

4.9.2.(127237) Найдите наименьшее значение функции $y = 11 + 75x - x^3$ на отрезке $[-5;5]$.

4.9.3.(127277) Найдите наименьшее значение функции $y = -7 + 243x - x^3$ на отрезке $[-9;9]$.

***

4.10.1.(прототип 77438) Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке $[-2;2]$.

4.10.2.(127287) Найдите наибольшее значение функции $y = 11 + 48x - x^3$ на отрезке $[-4;4]$.

4.10.3.(127291) Найдите наибольшее значение функции $y = -19 + 108x - x^3$ на отрезке $[-6;6]$.

***

4.11.1.(прототип 77441) Найдите наименьшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[-1;5]$.

4.11.2.(127535) Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - x^3 + 5$ на отрезке $[-5;1]$.

4.11.3.(127633) Найдите наименьшее значение функции $y = -16{,}5x^2 - x^3 + 58$ на отрезке $[-15;-0{,}5]$.

***

4.12.1.(прототип 77442) Найдите наибольшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[2;10]$.

4.12.2.(127635) Найдите наибольшее значение функции $y = -9x^2 - x^3 + 93$ на отрезке $[-0{,}5;8]$.

4.12.3.(127729) Найдите наибольшее значение функции $y = 19{,}5x^2 - x^3 + 17$ на отрезке $[11;16]$.

***

4.13.1.(прототип 77445) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3;3]$.

4.13.2.(127835) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 81x + 4$ на отрезке $[8;14]$.

4.13.3.(127863) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 36x + 7$ на отрезке $[5;8]$.

***

4.14.1.(прототип 77446) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3;3]$.

4.14.2.(127865) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 36x + 1$ на отрезке $[-8;-5]$.

4.14.3.(127867) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 81x - 8$ на отрезке $[-13;-6]$.

***

4.15.1.(прототип 77449) Найдите наименьшее значение функции $y=5+9x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-3;3]$.

4.15.2.(127995) Найдите наименьшее значение функции $y=-10+36x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-8;-5]$.

4.15.3.(127999) Найдите наименьшее значение функции $y=5+81x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-13;-8]$.

***

4.16.1.(прототип 77450) Найдите наибольшее значение функции $y=5+9x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-3;3]$.

4.16.2.(128025) Найдите наибольшее значение функции $y=5+81x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке $[8;13]$.

4.16.3.(128045) Найдите наибольшее значение функции $y=-3+36x-\frac{x^3}{3}$ на отрезке $[5;11]$.

***

4.17.1.(прототип 282861) Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2(x+5)-1$ на отрезке $[-4;-1]$.

4.17.2.(284027) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-6)^2(x+3)-3$ на отрезке $[5;19]$.

4.17.3.(284029) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-3)^2(x-6)-1$ на отрезке $[4;6]$.

***

4.18.1.(прототип 282862) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$ на отрезке $[1;3]$.

4.18.2.(284127) Найдите наибольшее значение функции $y=(x+10)^2x$ на отрезке $[-12;-6]$.

4.18.3.(284129) Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2(x-1)-6$ на отрезке $[-9;-2]$.

***

4.19.1.(прототип 315128) Найдите наибольшее значение функции x^5-5x^3-20x на отрезке $[-6;1]$.

4.19.2.(315739) Найдите наибольшее значение функции x^5-80x на отрезке $[-7;-1]$.

4.19.3.(315821) Найдите наибольшее значение функции x^5+15x^3-260x на отрезке $[-10;0]$.

***

4.20.1.(прототип 315129) Найдите наибольшее значение функции $3x^5-20x^3-54$ на отрезке $[-4;-1]$.

4.20.2.(315837) Найдите наибольшее значение функции $3x^5-20x^3-18$ на отрезке $[-8;1]$.

4.20.3.(315931) Найдите наибольшее значение функции $3x^5-5x^3+12$ на отрезке $[-6;0]$.

Дробные рациональные функции

Пример 13. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{2x}{x^2+1}$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма). 1) $D(y)=R$.

2) $y'=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$;

$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Критические точки функции на отрезке $[-2;2]$: -1; 1.

4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-2;2]$:

$$y(-1)=-1;\ y(1)=1;$$
$$y(-2)=-0,8;\ y(2)=0,8.$$

Следовательно, $\min\limits_{[-2;2]} y(x)=y(-1)=-1$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $D(y) = R$.

2) $y' = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$; $D(y') = R$.

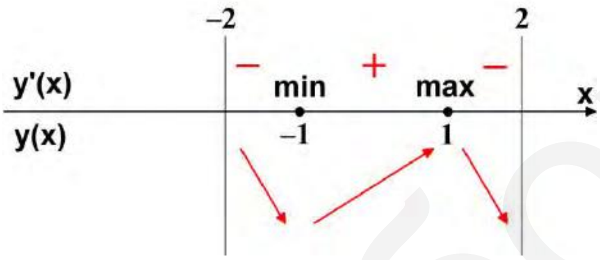
3) $y' = 0$;

$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Критические точки функции на отрезке $[-2;2]$: -1; 1.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-2;-1)$, $(-1;1)$ и $(1;2]$.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=1$ – точка максимума (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x=-1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-1$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции может достигаться при $x=-1$ или при $x=2$. Так как $y(-1)=-1$ и $y(2)=0{,}8$, то $\min\limits_{[-2;2]} y(x) = y(-1) = -1$.

Ответ: -1.

Пример 14. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2+529}{x}$ на отрезке $[-34;-2]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) В дроби выделим целую часть: $y = x + \dfrac{529}{x}$. $D(y) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y' = 1 - \dfrac{529}{x^2}$; $y' = \dfrac{x^2-529}{x^2}$.

$D(y') = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y' = 0$.

$$\frac{x^2-529}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-529=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-23, \\ x=23. \end{array}\right.$$

На отрезке $[-34;-2]$ имеется одна критическая точка функции $x=-23$.

4) Значения функции в критической точке и на концах отрезка $[-34;-2]$:

$$y(-34) = -49\frac{19}{34};\ y(-23) = -46;$$

$$y(-2) = -266{,}5.$$

Следовательно, $\max\limits_{[-34;-2]} y(x) = y(-23) = -46$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $y = x + \dfrac{529}{x}$. $D(y) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y' = 1 - \dfrac{529}{x^2}$; $y' = \dfrac{x^2-529}{x^2}$.

$D(y') = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

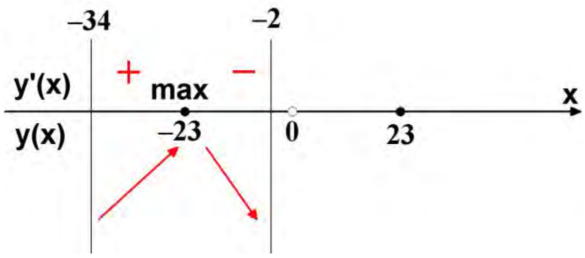
3) $y' = 0$.

$$\frac{x^2-529}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-529=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-23, \\ x=23. \end{array}\right.$$

На отрезке $[-34;-2]$ имеется одна критическая точка функции $x=-23$.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-34;-23)$ и $(-23;-2]$.

При переходе через критическую точку $x=-23$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=-23$ – точка максимума функции (см. рисунок).



Наибольшее значение функции на отрезке $[-34;-2]$ достигается в точке $x=-23$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-34;-2]} y(x)=y(-23)=-46.$$

Замечание. Используя вторую производную $y''=\dfrac{1058}{x^3}$, определяем также, что $y''(-23)<0$ и $x=-23$ – точка максимума функции.

Ответ: –46.

Пример 15. Найдите наибольшее значение функции $y=3-\dfrac{6}{x}$ на промежутке $\left[-6;-2\right]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{6}{x^2}$; $D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $\dfrac{6}{x^2}=0$. Уравнение не имеет корней. Функция не имеет критических точек на своей области определения и в частности на отрезке $\left[-6;-2\right]$.

4) Значения функции на концах отрезка $\left[-6;-2\right]$:

$$y(-6)=3-\frac{6}{-6}=4;$$

$$y(-2)=3-\frac{6}{-2}=6.$$

Следовательно, $\max\limits_{[-6;-2]} y(x)=y(-2)=6$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

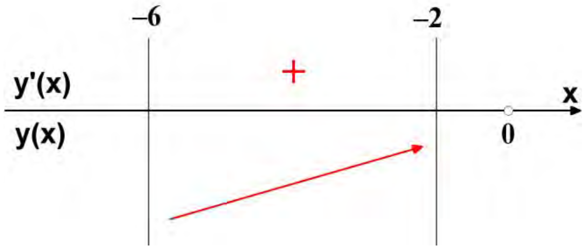
1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{6}{x^2}$; $D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $\dfrac{6}{x^2}=0$. Уравнение не имеет корней.

4) Функция не имеет критических точек на отрезке $\left[-6;-2\right]$. Производная на отрезке $\left[-6;-2\right]$ имеет постоянный знак. Так как $y'(-3)>0$, то функция возрастает на отрезке $\left[-6;-2\right]$ и достигает наибольшего значения при $x=-2$.

Получаем $\max\limits_{[-6;-2]} y(x)=y(-2)=6$.



Ответ: 6.

***

4.21.1.(прототип 77474) Найдите наибольшее значение функции $y=x+\dfrac{9}{x}$ на отрезке $[-4;-1]$.

4.21.2.(130113) Найдите наибольшее значение функции $y=x+\dfrac{4}{x}+14$ на отрезке $[-11;-0{,}5]$.

4.21.3.(130115) Найдите наибольшее значение функции $y=x+\dfrac{784}{x}+17$ на отрезке $[-35;-0{,}5]$.

***

4.22.1.(прототип 77473) Найдите наименьшее значение функции $y=x+\dfrac{36}{x}$ на отрезке $[1;9]$.

4.22.2.(130063) Найдите наименьшее значение функции $y=2x+\dfrac{288}{x}+14$ на отрезке $[0{,}5;25]$.

4.22.3.(130065) Найдите наименьшее значение функции $y=x+\dfrac{529}{x}+18$ на отрезке $[0{,}5;36]$.

***

4.23.1.(прототип 77469) Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[1;10]$.

4.23.2.(129903) Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+100}{x}$ на отрезке $[4;21]$.

4.23.3.(129905) Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+256}{x}$ на отрезке $[1;25]$.

***

4.24.1.(прототип 77470) Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-10;-1]$.

4.24.2.(129933) Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+729}{x}$ на отрезке $[-38;-3]$.

4.24.3.(129935) Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+676}{x}$ на отрезке $[-33;-2]$.

Функции, содержащие степенные и иррациональные выражения

Пример 16. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма). 1) $D(y)=R$. Запишем функцию в виде $y=(x-2)x^{\frac{2}{3}}$.

2) $y'=\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$; $D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}=0$; $x=\dfrac{4}{5}$. Производная обращается в нуль в точке $x=\dfrac{4}{5}$ и не существует в точке $x=0$. На отрезке $[-1;3]$ лежат критические точки: 0 и $\dfrac{4}{5}$.

4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-1;3]$:

$$y(0)=0;\quad y\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}};$$

$$y(-1)=-3;\ y(3)=\sqrt[3]{9}.$$

Сравним числа: $-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}\vee-3$; $\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}\wedge 3$; $\sqrt[3]{\dfrac{3456}{3125}}\wedge\sqrt[3]{27}$. Так как $\sqrt[3]{\dfrac{3456}{3125}}<\sqrt[3]{27}$, то $-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}>-3$.

Следовательно, $\min\limits_{[-1;3]}y(x)=y(-1)=-3$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

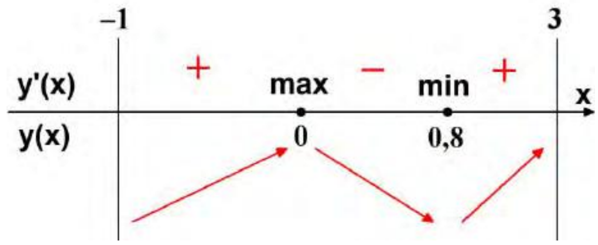
1) $D(y)=R$.

2) $y'=\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$; $D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}=0$; $x=0,8$. Отрезок $[-1;3]$ содержит две критические точки 0 и 0,8.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-1;0)$, $(0;0,8)$ и $(0,8;3]$.

При переходе через критическую точку $x=0,8$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=0,8$ – точка минимума (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус, и данная функция непрерывна в этой точке. Значит, $x=0$ – точка максимума.

Наименьшее значение функции может достигаться при $x=-1$ или при $x=0,8$.

Так как $y(-1)=-3$, $y\left(\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}$ и $-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}>-3$. то $\min\limits_{[-1;3]}y(x)=y(-1)=-3$.

Ответ: –3.

Пример 17. Найдите наибольшее значение функции $y=6+12x-x\sqrt{x}$ на отрезке $[62;68]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма). 1) $D(y) = [0; +\infty)$. Запишем функцию в виде $y = 6 + 12x - x^{\frac{3}{2}}$.

2) $y' = 12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; $D(y') = [0; +\infty)$.

3) $y' = 0$; $12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0$; $\sqrt{x} = 8$; $x = 64$.

На отрезке $[62; 68]$ имеется одна критическая точка функции $x = 64$.

4) Значения функции в критической точке и на концах отрезка $[62; 68]$:

$$y(64) = 262; \quad y(62) = 750 - 62\sqrt{62};$$
$$y(68) = 822 - 68\sqrt{68}.$$

Сравним числа: $262 \vee 750 - 62\sqrt{62}$; $62\sqrt{62} \vee 488$; $\sqrt{238328} \vee \sqrt{238144}$. Так как $\sqrt{238328} > \sqrt{238144}$, то $262 > 750 - 62\sqrt{62}$.

Сравним числа: $262 \vee 822 - 68\sqrt{68}$; $68\sqrt{68} \vee 560$; $\sqrt{314432} \vee \sqrt{313600}$. Так как $\sqrt{314432} > \sqrt{313600}$, то $262 > 822 - 68\sqrt{68}$.

Следовательно,

$$\max_{[62;68]} y(x) = y(64) = 262.$$

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $D(y) = [0; +\infty)$.

2) $y' = 12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; $D(y') = [0; +\infty)$.

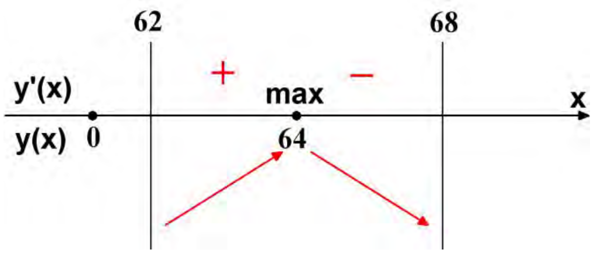
3) $y' = 0$; $12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0$; $\sqrt{x} = 8$; $x = 64$.

На отрезке $[62; 68]$ имеется одна критическая точка функции $x = 64$.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[62; 64)$ и $(64; 68]$. Например,

$y'(68) = 12 - 3\sqrt{17} = \sqrt{144} - \sqrt{153} < 0$.

Ставим знак «минус» на промежутке $(64; 68]$. На промежутке $[62; 64)$ ставим знак «+», используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x = 64$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x = 64$ – точка максимума функции.

Наибольшее значение функции на отрезке $[62; 68]$ достигается в точке $x = 64$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[62;68]} y(x) = y(64) = 262.$$

Замечание. Используя вторую производную $y'' = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$, определяем также, что $y''(64) < 0$ и $x = 64$ – точка максимума функции.

Ответ: 262.

Пример 18. Найдите наибольшее значение функции $y = -\sqrt{x-2} + 3$ на промежутке $[6; 11]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y) = [2; +\infty)$.

2) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$; $D(y') = (2; +\infty)$.

3) $y' = 0$; $-\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = 0$. Уравнение не имеет корней. Функция не имеет критических точек на своей области определения и в частности на отрезке $[6; 11]$.

4) Значения функции на концах отрезка $[6; 11]$:

$$y(6) = 1; \; y(11) = 0.$$

Следовательно, $\max\limits_{[6;11]} y(x) = y(6) = 1$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

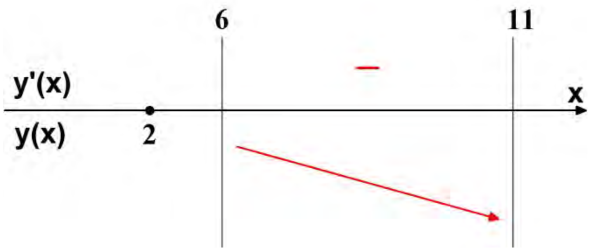
1) $D(y) = [2; +\infty)$.

2) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$; $D(y') = (2; +\infty)$.

3) $y'=0$; $-\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}=0$. Уравнение не имеет корней.

4) Функция не имеет критических точек на отрезке $[6;11]$. Производная на отрезке $[6;11]$ имеет постоянный знак. Так как $y'(6)<0$, то функция убывает на отрезке $[6;11]$ и достигает наибольшего значения при $x=6$.

Получаем $\max\limits_{[6;11]} y(x)=y(6)=1$.



Ответ: 1.

***

4.25.1.(прототип 77452) Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

4.25.2.(128105) Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-9x+19$ на отрезке $[1;407]$.

4.25.3.(128107) Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-6x+8$ на отрезке $[3;403]$.

***

4.26.1.(прототип 77456) Найдите наибольшее значение функции $y=3x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0;4]$.

4.26.2.(128505) Найдите наибольшее значение функции $y=9+33x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[1;482]$.

4.26.3.(128635) Найдите наибольшее значение функции $y=11+30x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[1;398]$.

***

4.27.1.(прототип 77454) Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

4.27.2.(128255) Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+24$ на отрезке $[4;582]$.

4.27.3.(128257) Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-9x+22$ на отрезке $[18{,}25;34]$.

***

4.28.1.(прототип 77458) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

4.28.2.(128799) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+12x+13$ на отрезке $[34;37]$.

4.28.3.(128801) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x+7$ на отрезке $[140;145]$.

***

4.29.1.(прототип 77460) Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

4.29.2.(128999) Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-30x+18$ на отрезке $[0;400]$.

4.29.3.(129047) Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-18x+15$ на отрезке $[3;144]$.

***

4.30.1.(прототип 77464) Найдите наибольшее значение функции $y=3x-2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

4.30.2.(129395) Найдите наибольшее значение функции $y=11+24x-4x\sqrt{x}$ на отрезке $[15;20]$.

4.30.3.(129523) Найдите наибольшее значение функции $y=9+15x-4x\sqrt{x}$ на отрезке $[4,25;7,25]$.

***

4.31.1.(прототип 77462) Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

4.31.2.(129149) Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-3x+71$ на отрезке $[0,25;31]$.

4.31.3.(129151) Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-12x+83$ на отрезке $[3;581]$.

***

4.32.1.(прототип 77466) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

4.32.2.(129695) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16$ на отрезке $[323;326]$.

4.32.3.(129839) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+6x+9$ на отрезке $[9;12]$.

Функции, содержащие показательные выражения

Пример 19. Найдите наибольшее значение функции $y=(2x^2+14x-14)e^x$ на отрезке $[-10;1]$.

Решение. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^x(2x^2+18x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$. $e^x(2x^2+18x)=0$. Так как $e^x>0$ при $x\in R$, то из уравнения $2x^2+18x=0$ получаем корни (и критические точки функции) –9 и 0, лежащие на отрезке $[-10;1]$.

4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-10;1]$:

$$y(-9)=\frac{22}{e^9};\quad y(0)=-14;$$

$$y(-10)=\frac{46}{e^{10}};\quad y(1)=2e.$$

Следовательно, $\max\limits_{[-10;1]} y(x)=y(1)=2e$.

Ответ: $2e$.

Пример 20. Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2+28x-28)e^{-28-x}$ на отрезке $[-33;-23]$.

Решение. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{-28-x}(-x^2-26x+56)$. $D(y')=R$.

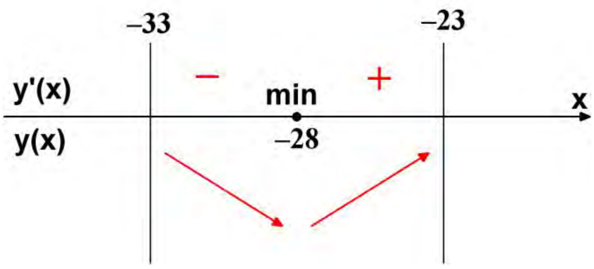
3) $y'=0$. $e^{-28-x}(-x^2-26x+56)=0$. Так как $e^{-28-x}>0$ при $x\in R$, то из уравнения $x^2+26x-56=0$ получаем корни (и критические точки функции): –28 и 2.

На отрезке $[-33;-23]$ имеется одна критическая точка функции $x=-28$.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-33;-28)$ и $(-28;-23]$.

Например, $y'(-30)=-64e^2<0$. Ставим знак «–» на промежутке $[-33;-28)$. На промежутке $(-28;-23]$ ставим знак «+», используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок).

При переходе через критическую точку $x=-28$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=-28$ – точка минимума функции.



Наименьшее значение функции на отрезке $[-33;-23]$ достигается в точке $x=-28$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min\limits_{[-33;-23]} y(x)=y(-28)=-28.$$

Замечание. Используя вторую производную $y''=e^{-28-x}(x^2+24x-82)$, определяем также, что $y''(-28)=30>0$ и $x=-28$ – точка минимума функции.

Ответ: –28.

Пример 21. Найдите наибольшее значение функции $y=2e^{3x}$ на отрезке $[\ln 2;\ln 5]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y)=R$.

2) $y'=6e^{3x}$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $6e^{3x}=0$. Уравнение не имеет корней. Функция не имеет критических точек на своей области определения и в частности на отрезке $[\ln 2;\ln 5]$.

4) Значения функции на концах отрезка $[\ln 2;\ln 5]$:

$$y(\ln 2)=16;\ y(\ln 5)=250.$$

Следовательно, $\max\limits_{[\ln 2;\ln 5]} y(x)=y(\ln 5)=250$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

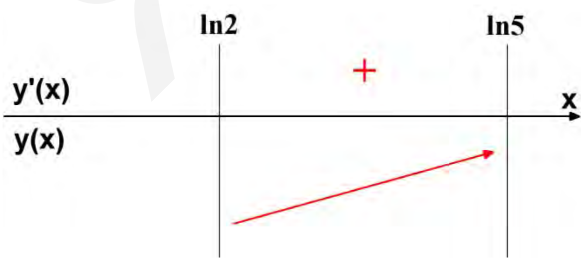
1) $D(y)=R$.

2) $y'=6e^{3x}$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $6e^{3x}=0$. Уравнение не имеет корней.

4) Функция не имеет критических точек на отрезке $[\ln 2;\ln 5]$. Производная на отрезке $[\ln 2;\ln 5]$ имеет постоянный знак. Так как $y'(\ln 2)>0$, то функция возрастает на отрезке $[\ln 2;\ln 5]$ и достигает наибольшего значения при $x=\ln 5$.

Получаем $\max\limits_{[\ln 2;\ln 5]} y(x)=y(\ln 5)=250$.



Ответ: 250.

***

4.33.1.(прототип 77475) Найдите наименьшее значение функции $y=(8-x)e^{9-x}$ на отрезке $[3;10]$.

4.33.2.(130163) Найдите наименьшее значение функции $y=(5-x)e^{6-x}$ на отрезке $[0{,}5;15]$.

4.33.3.(130189) Найдите наименьшее значение функции $y=(11-x)e^{12-x}$ на отрезке $[6;18]$.

***

4.34.1.(прототип 77476) Найдите наибольшее значение функции $y=(8-x)e^{x-7}$ на отрезке $[3;10]$.

4.34.2.(130193) Найдите наибольшее значение функции $y=(6-x)e^{x-5}$ на отрезке $[0{,}5;15]$.

4.34.3.(130195) Найдите наибольшее значение функции $y=(22-x)e^{x-21}$ на отрезке $[16;25]$.

***

4.35.1.(прототип 26691) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

4.35.2.(3385) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-6)e^{x-5}$ на отрезке $[4;6]$.

4.35.3.(69993) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-24)e^{x-23}$ на отрезке $[22;24]$.

***

4.36.1.(прототип 77477) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-9)e^{10-x}$ на отрезке $[-11;11]$.

4.36.2.(130223) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-22)e^{23-x}$ на отрезке $[18;31]$.

4.36.3.(130225) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-30)e^{31-x}$ на отрезке $[24;41]$.

***

4.37.1.(прототип 77482) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-2)^2e^{x-2}$ на отрезке $[1;4]$.

4.37.2.(130661) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-49)^2e^{x-49}$ на отрезке $[47{,}5;54]$.

4.37.3.(130663) Найдите наименьшее значение функции $y=(x-4)^2e^{x-4}$ на отрезке $[3;8]$.

***

4.38.1.(прототип 77483) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2e^x$ на отрезке $[-5;1]$.

4.38.2.(130709) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-49)^2e^{x-47}$ на отрезке $[2;48]$.

4.38.3.(130755) Найдите наибольшее значение функции $y=(x-27)^2e^{x-25}$ на отрезке $[0;26]$.

***

4.39.1.(прототип 77484) Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2e^{-3-x}$ на отрезке $[-5;-1]$.

4.39.2.(130757) Найдите наименьшее значение функции $y=(x+24)^2e^{-24-x}$ на отрезке $[-27;-23]$.

4.39.3.(130759) Найдите наименьшее значение функции $y=(x+44)^2e^{-44-x}$ на отрезке $[-46;-43]$.

***

4.40.1.(прототип 77485) Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2e^{-4-x}$ на отрезке $[-6;-1]$.

4.40.2.(130805) Найдите наибольшее значение функции $y=(x+48)^2e^{-46-x}$ на отрезке $[-47;-45]$.

4.40.3.(130849) Найдите наибольшее значение функции $y=(x+39)^2e^{-37-x}$ на отрезке $[-38{,}5;-36]$.

***

4.41.1.(прототип 77478) Найдите наименьшее значение функции $y=(3x^2-36x+36)e^{x-10}$ на отрезке $[8;11]$.

4.41.2.(130253) Найдите наименьшее значение функции $y=(2x^2+14x-14)e^x$ на отрезке $[-2;4]$.

4.41.3.(130351) Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2-19x+19)e^{x-17}$ на отрезке $[14;20]$.

***

4.42.1.(прототип 77479) Найдите наибольшее значение функции $y=(3x^2-36x+36)e^x$ на отрезке $[-1;4]$.

4.42.2.(130361) Найдите наибольшее значение функции $y=(2x^2+36x-36)e^{x+40}$ на отрезке $[-41;-2]$.

4.42.3.(1304590 Найдите наибольшее значение функции $y=(x^2+10x-10)e^{x+12}$ на отрезке $[-18;-4]$.

***

4.43.1.(прототип 77480) Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2-8x+8)e^{2-x}$ на отрезке $[1;7]$.

4.43.2.(130465) Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2+21x-21)e^{-21-x}$ на отрезке $[-26;-18]$.

4.43.3.(130467) Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2+25x-25)e^{-25-x}$ на отрезке $[-28;-20]$.

***

4.44.1.(прототип 77481) Найдите наибольшее значение функции $y=(x^2-10x+10)e^{10-x}$ на отрезке $[5;11]$.

4.44.2.(130563) Найдите наибольшее значение функции $y=(x^2+46x-46)e^{2-x}$ на отрезке $[0;4]$.

4.44.3.(130659) Найдите наибольшее значение функции $y=(x^2-21x+21)e^{21-x}$ на отрезке $[20;23]$.

***

4.45.1.(прототип 315127) Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-6e^x+3$ на отрезке $[1;2]$.

4.45.2.(315635) Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-4e^{x}+6$ на отрезке $[0;3]$.

4.45.3.(315731) Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-2e^{x}+9$ на отрезке $[-1;1]$.

<u>Функции, содержащие логарифмические выражения</u>

Пример 22. Найдите наибольшее значение функции $y=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x$ на отрезке $\left[1;e^3\right]$.

Решение. 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{6(\ln^2 x-3\ln x+2)}{x}$;

$D(y')=(0;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$$\frac{6(\ln^2 x-3\ln x+2)}{x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ln^2 x-3\ln x+2=0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=1,\\ \ln x=2.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=e,\\ x=e^2.\end{array}\right.$$

Функция имеет две критические точки e и e^2, лежащие на отрезке $\left[1;e^3\right]$.

4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $\left[1;e^3\right]$:

$$y(e)=5;\quad y(e^2)=4;$$
$$y(1)=0;\quad y(e^3)=9.$$

Следовательно, $\max\limits_{[1;e^3]} y(x)=y(e^3)=9$.

Ответ: 9.

Пример 23. Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(10x)-10x+4$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{4}\right]$.

Решение. 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{1}{x}-10$; $y'=\dfrac{1-10x}{x}$.

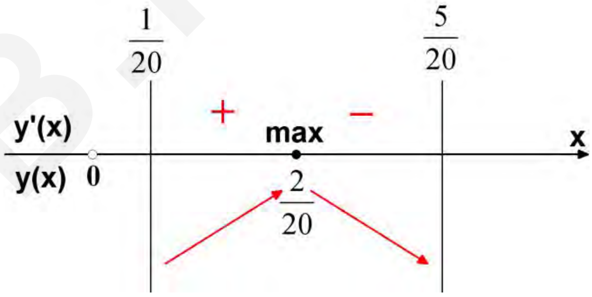
$D(y')=(0;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$$\frac{1-10x}{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-10x=0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{10}.$$

На отрезке $\left[\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{4}\right]$ имеется одна критическая точка $x=\dfrac{1}{10}$.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $\left[\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{10}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{4}\right]$. Например, $y'\left(\dfrac{3}{20}\right)<0$. Ставим знак «–» на промежутке $\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{4}\right]$. На промежутке $\left[\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{10}\right)$ ставим знак «+», используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x=\dfrac{1}{10}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=\dfrac{1}{10}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[\dfrac{1}{20};\dfrac{1}{4}\right]$ достигается в точке $x=\dfrac{1}{10}$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{\left[\frac{1}{20};\frac{1}{4}\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{10}\right)=3.$$

Замечание. Используя вторую производную $y''=-\dfrac{1}{x^2}$, определяем также, что

$y''\left(\dfrac{1}{10}\right) = -100 < 0$ и $x = \dfrac{1}{10}$ – точка максимума функции.

Замечание. Вместо расстановки знаков производной y' на каждом из промежутков $\left[\dfrac{1}{20}; \dfrac{1}{10}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{4}\right]$, можно сначала расставить знаки на интервалах $\left(0; \dfrac{1}{10}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{10}; +\infty\right)$.

Ответ: 3.

Пример 24. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\ln x$ на отрезке $\left[e^2; e^3\right]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y) = (0; +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{3}{x}$; $D(y') = (0; +\infty)$.

3) $y' = 0$; $\dfrac{3}{x} = 0$. Уравнение не имеет корней. Функция не имеет критических точек на своей области определения и в частности на отрезке $\left[e^2; e^3\right]$.

4) Значения функции на концах отрезка $\left[e^2; e^3\right]$:

$$y(e^2) = 6;\ y(e^3) = 9.$$

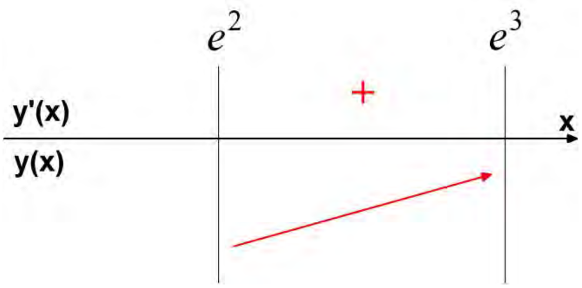
Следовательно, $\min\limits_{[e^2;e^3]} y(x) = y(e^2) = 6$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $D(y) = (0; +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{3}{x}$; $D(y') = (0; +\infty)$.

3) $y' = 0$; $\dfrac{3}{x} = 0$. Уравнение не имеет корней.



4) Функция не имеет критических точек на отрезке $\left[e^2; e^3\right]$. Производная на отрезке $\left[e^2; e^3\right]$ имеет постоянный знак. Так как $y'(e^2) > 0$, то функция возрастает на отрезке $\left[e^2; e^3\right]$ и достигает наименьшего значения при $x = e^2$.

Получаем $\min\limits_{[e^2;e^3]} y(x) = y(e^2) = 6$.

Ответ: 6.

***

4.46.1.(прототип 26714) Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

4.46.2.(3851) Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(x+5)^5$ на отрезке $[-4{,}5; 0]$.

4.46.3.(71035) Найдите наименьшее значение функции $y = 10x - \ln(x+8)^{10}$ на отрезке $[-7{,}5; 0]$.

***

4.47.1.(прототип 26715) Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4{,}5; 0]$.

4.47.2.(3867) Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+4)^9 - 9x$ на отрезке $[-3{,}5; 0]$.

4.47.3.(71087) Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+11)^{12} - 12x$ на отрезке $[-10{,}5; 0]$.

***

4.48.1.(прототип 26716) Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$ на отрезке $[-6{,}5; 0]$.

4.48.2.(3889) Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\ln(x+3) + 12$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

4.48.3.(71135) Найдите наименьшее значение функции $y = 12x - 12\ln(x+19) - 23$ на отрезке $[-18{,}5; 0]$.

***

4.49.1.(прототип 26717) Найдите наибольшее значение функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6,5;0]$.

4.49.2.(3907) Найдите наибольшее значение функции $y = 6\ln(x+6) - 6x + 5$ на отрезке $[-5,5;0]$.

4.49.3.(71181) Найдите наибольшее значение функции $y = 12\ln(x+20) - 12x + 25$ на отрезке $[-19,5;0]$.

***

4.50.1.(прототип 26718) Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.

4.50.2.(3931) Найдите наименьшее значение функции $y = 10x - \ln(10x) + 6$ на отрезке $\left[\frac{1}{20};\frac{1}{4}\right]$.

4.50.3.(71217) Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \ln(6x) + 17$ на отрезке $\left[\frac{1}{12};\frac{5}{12}\right]$.

***

4.51.1.(прототип 26719) Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22};\frac{5}{22}\right]$.

4.51.2.(3949) Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(5x) - 5x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right]$.

4.51.3.(71247) Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(19x) - 19x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{38};\frac{5}{38}\right]$.

***

4.52.1.(прототип 26721) Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right]$.

4.52.2.(3965) Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{10}{11};\frac{12}{11}\right]$.

4.52.3.(42690 Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 13x + 5\ln x - 8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.

***

4.53.1.(прототип 26720) Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.

4.53.2.(3995) Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 12x + 8\ln x - 8$ на отрезке $\left[\frac{1}{13};\frac{14}{13}\right]$.

4.53.3.(4265) Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 7x + 5\ln x - 12$ на отрезке $\left[\frac{7}{8};\frac{9}{8}\right]$.

Функции, содержащие тригонометрические выражения

Пример 25. Найдите наибольшее значение функции $y = 8\cos x - \frac{27}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y) = R$.

2) $y' = -8\sin x - \frac{27}{\pi}$; $D(y') = R$.

3) $-8\sin x - \frac{27}{\pi} = 0$. Уравнение $\sin x = -\frac{27}{8\pi}$ не имеет корней, так как $-\frac{27}{8\pi} < -1$. Функция не имеет критических точек.

4) Значения функции на концах отрезка $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$:

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=20;\ y(0)=14.$$

Следовательно,

$$\max_{\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]} y(x)=y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=20.$$

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

1) $D(y)=R$.

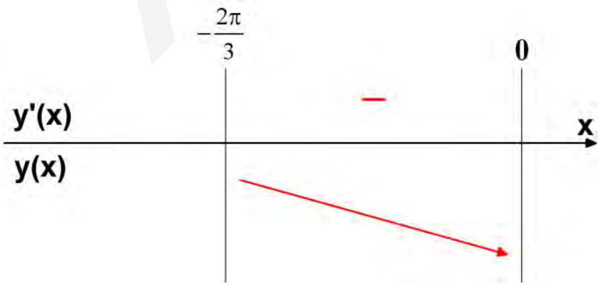
2) $y'=-8\sin x-\frac{27}{\pi}$; $D(y')=R$.

3) $-8\sin x-\frac{27}{\pi}=0$. Уравнение $\sin x=-\frac{27}{8\pi}$ не имеет корней, так как $-\frac{27}{8\pi}<-1$.

4) Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак. Так как $y'(0)=-\frac{27}{\pi}<0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$ достигается при $x=-\frac{2\pi}{3}$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]} y(x)=y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=20.$$



Ответ: 20.

***

4.54.1.(прототип 26731) Найдите наименьшее значение функции $y=13x-9\sin x+9$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.54.2.(4183) Найдите наименьшее значение функции $y=17x-4\sin x+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.54.3.(71761) Найдите наименьшее значение функции $y=11x-7\sin x-19$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

***

4.55.1.(прототип 26695) Найдите наибольшее значение функции $y=15x-3\sin x+5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4.55.2.(3459) Найдите наибольшее значение функции $y=11x-9\sin x+3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4.55.3.(70187) Найдите наибольшее значение функции $y=25x-22\sin x+25$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

***

4.56.1.(прототип 77497) Найдите наибольшее значение функции $y=5\sin x-6x+3$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.56.2.(132319) Найдите наибольшее значение функции $y=21\sin x-24x+25$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.56.3.(132353) Найдите наибольшее значение функции $y=14\sin x-16x+2$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

***

4.57.1.(прототип 26697) Найдите наименьшее значение функции $y = 7\sin x - 8x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

4.57.2.(3495) Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x - 12x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

4.57.3.(70287) Найдите наименьшее значение функции $y = 16\sin x - 19x + 22$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

***

4.58.1.(прототип 26696) Найдите наименьшее значение функции $y = 9\cos x + 14x + 7$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

4.58.2.(3477) Найдите наименьшее значение функции $y = 10\cos x + 17x + 3$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

4.58.3.(70235) Найдите наименьшее значение функции $y = 46\cos x + 49x + 37$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

***

4.59.1.(прототип 77496) Найдите наибольшее значение функции $y = 4\cos x - 20x + 7$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

4.59.2.(132269) Найдите наибольшее значение функции $y = 24\cos x - 29x + 29$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

4.59.3.(132271) Найдите наибольшее значение функции $y = 13\cos x - 15x + 23$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

***

4.60.1.(прототип 26694) Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

4.60.2.(3445) Найдите наименьшее значение функции $y = 13\cos x - 15x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

4.60.3.(70137) Найдите наименьшее значение функции $y = 62\cos x - 65x + 45$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

***

4.61.1.(прототип 26730) Найдите наибольшее значение функции $y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

4.61.2.(4163) Найдите наибольшее значение функции $y = 9\cos x + 15x - 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

4.61.3.(71705) Найдите наибольшее значение функции $y = 8\cos x + 9x - 11$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

***

4.62.1.(прототип 26698) Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

4.62.2.(3515) Найдите наименьшее значение функции $y = 4\cos x + \frac{21}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

4.62.3.(70335) Найдите наименьшее значение функции $y = 7\cos x + \frac{27}{\pi}x + 17$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

***

4.63.1.(прототип 26700) Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \frac{18}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

4.63.2.(3551) Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \frac{24}{\pi}x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

4.63.3.(70437) Найдите наибольшее значение функции $y = 16\cos x - \frac{102}{\pi}x + 41$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

***

4.64.1.(прототип 26699) Найдите наибольшее значение функции $y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

4.64.2.(3533) Найдите наибольшее значение функции $y = 4\sin x - \frac{36}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

4.64.3.(70387) Найдите наибольшее значение функции $y = 14\sin x - \frac{48}{\pi}x + 22$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

***

4.65.1.(прототип 26701) Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

4.65.2.(3569) Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin x + \frac{30}{\pi}x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

4.65.3.(70487) Найдите наименьшее значение функции $y = 14\sin x + \frac{72}{\pi}x + 26$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Пример 26. Найдите наименьшее значение функции

$$y = -20 - 3\sqrt{3}\pi + 9\sqrt{3}x - 18\sqrt{3}\sin x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. 1) Область определения функции $D(y) = R$.

2) Находим производную функции

$$y' = 9\sqrt{3} - 18\sqrt{3}\cos x.$$

$D(y') = R$.

3) Решаем уравнение $y' = 0$.

$$9\sqrt{3} - 18\sqrt{3}\cos x = 0;\ \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ данная функция имеет одну критическую точку $x = \frac{\pi}{3}$.

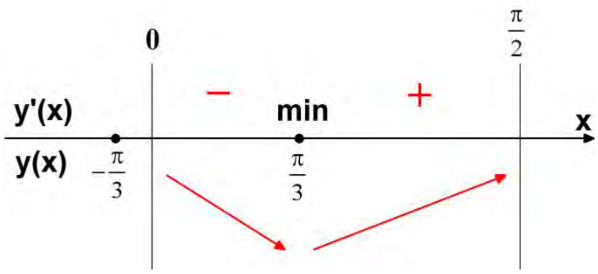
4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Например,

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 9\sqrt{3} - 18\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{3}(1 - \sqrt{2}) < 0.$$

Ставим знак «–» на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$.

На промежутке $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ ставим знак «+», используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{3}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=\frac{\pi}{3}$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ достигается в точке $x=\frac{\pi}{3}$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-47.$$

Замечание. Используя вторую производную $y''=18\sqrt{3}\sin x$, определяем также, что $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)=27>0$ и $x=\frac{\pi}{3}$ – точка минимума функции.

Ответ: –47.

***

4.66.1.(прототип 77498) Найдите наибольшее значение функции $y=12\sin x-6\sqrt{3}x+\sqrt{3}\cdot\pi+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.66.2.(132373) Найдите наибольшее значение функции $y=66\sin x-33\sqrt{3}\cdot x+5{,}5\sqrt{3}\cdot\pi+4$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.66.3.(132515) Найдите наибольшее значение функции $y=34\sqrt{2}\sin x-34x+8{,}5\pi+30$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

***

4.67.1.(прототип 77499) Найдите наименьшее значение функции

$$y=3-\frac{5\pi}{4}+5x-5\sqrt{2}\sin x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.67.2.(132519) Найдите наименьшее значение функции

$$y=-15-8\pi+32x-32\sqrt{2}\sin x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.67.3.(132525) Найдите наименьшее значение функции

$$y=-10-2{,}5\sqrt{3}\cdot\pi+15\sqrt{3}\cdot x-30\sin x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

***

4.68.1.(прототип 26692) Найдите наибольшее значение функции

$$y=12\cos x+6\sqrt{3}\cdot x-2\sqrt{3}\pi+6$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.68.2.(3403) Найдите наибольшее значение функции $y=12\sqrt{2}\cos x+12x-3\pi+9$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.68.3.(3415) Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{22\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{11\sqrt{3}}{3}x-\frac{11\sqrt{3}\pi}{18}+5$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

***

4.69.1.(прототип 26693) Найдите наименьшее значение функции

$$y=3+\frac{5\pi}{4}-5x-5\sqrt{2}\cos x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.69.2.(3419) Найдите наименьшее значение функции

$$y=4+\frac{4\sqrt{3}\cdot\pi}{3}-4\sqrt{3}\cdot x-8\cos x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.69.3.(70087) Найдите наименьшее значение функции

$$y=-21+\frac{25\sqrt{3}\cdot\pi}{6}-\frac{25\sqrt{3}}{2}\cdot x-25\cos x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 27. Найдите наибольшее значение функции $y=63x-63\mathrm{tg}x-41$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Решение. 1) Область определения функции задается условием $\cos x\neq 0$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

2) Находим производную функции

$$y'=63-\frac{63}{\cos^2 x};\quad y'=\frac{63\cos^2 x-63}{\cos^2 x};$$

$$y'=-\frac{63\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=-63\,\mathrm{tg}^2 x\leq 0.$$

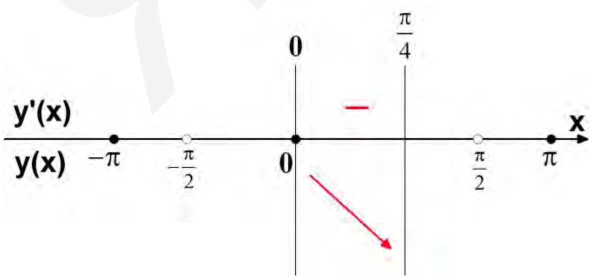
$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) Решаем уравнение $y'=0$.

$-63\,\mathrm{tg}^2 x=0$; $\mathrm{tg}\,x=0$; $x=\pi k,\ k\in Z$.

4) На интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ данная функция определена и не имеет критических точек, при этом $y'<0$. Значит, функция убывает на заданном отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ и наибольшее значение функции на этом отрезке достигается при $x=0$. Таким образом

$$\max_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y(x)=y(0)=-41.$$



Ответ: –41.

***

4.70.1.(прототип 26703) Найдите наименьшее значение функции $y=5\mathrm{tg}x-5x+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

4.70.2.(3605) Найдите наименьшее значение функции $y=3\mathrm{tg}x-3x+7$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

4.70.3.(70585) Найдите наименьшее значение функции $y=28\mathrm{tg}x-28x+44$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

***

4.71.1.(прототип 26702) Найдите наибольшее значение функции $y=3\mathrm{tg}x-3x+5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

4.71.2.(3587) Найдите наибольшее значение функции $y=10\mathrm{tg}x-10x+9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

4.71.3.(70537) Найдите наибольшее значение функции $y=57\mathrm{tg}x-57x+23$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

***

4.72.1.(прототип 26704) Найдите наибольшее значение функции

$$y=16\mathrm{tg}x-16x+4\pi-5$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

4.72.2.(3625) Найдите наибольшее значение функции $y=20\mathrm{tg}x-20x+5\pi-5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

4.72.3.(4219) Найдите наибольшее значение функции $y=12\mathrm{tg}x-12x+3\pi+5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

***

4.73.1.(прототип 26705) Найдите наименьшее значение функции $y = 4\text{tg}x - 4x - \pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.73.2.(3643) Найдите наименьшее значение функции $y = 36\text{tg}x - 36x - 9\pi + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.73.3.(71881) Найдите наименьшее значение функции $y = 11\text{tg}x - 11x - \frac{11\pi}{4} + 12$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

***

4.74.1.(прототип 26706) Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 3\text{tg}x - 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.74.2.(3661) Найдите наибольшее значение функции $y = 9x - 9\text{tg}x - 7$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.74.3.(70635) Найдите наибольшее значение функции $y = 22x - 22\text{tg}x - 38$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

***

4.75.1.(прототип 26707) Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\text{tg}x + 12$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

4.75.2.(36850 Найдите наименьшее значение функции $y = x - \text{tg}x + 17$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

4.75.3.(706850 Найдите наименьшее значение функции $y = 19x - 19\text{tg}x + 35$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Пример 28. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 2\cos x + 2\cos 2x$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $2\cos x + 2\cos 2x = 0$;

$$4\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos\frac{3x}{2} = 0, \\ \cos\frac{x}{2} = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; \end{array}\right. \quad k, n \in Z.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x = \pi + 2\pi n; \end{array}\right. \quad k, n \in Z.$$

Внутри отрезка $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ лежат критические точки $\frac{\pi}{3}$ и π.

4) Вычислим значения данной функции в найденных критических точках и на концах отрезка $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad y(\pi) = 0;$$

$$y(0) = 0; \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2.$$

Сравнивая вычисленные значения, получаем $\max\limits_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Пример 29. Найдите наибольшее значение функции $y = 10x - 5\text{tg}x - 2{,}5\pi + 12$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. 1) $D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

2) $y'=10-\dfrac{5}{\cos^2 x}$; $y'=\dfrac{5(2\cos^2 x-1)}{\cos^2 x}$;

$$y'=\frac{5\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

$D(y'): x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

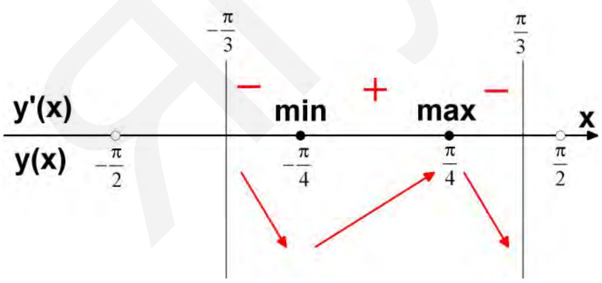
3) $y'=0$.

$$\frac{5\cos 2x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \end{cases} n,k\in Z.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$ и имеет две критические точки $-\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{4}$.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $\left[-\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$. Например, $y'(0)=5>0$. Ставим знак «+» на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. На остальных промежутках расставляем знаки, используя свойство знакочередования производной y' (см. рисунок).



При переходе через критическую точку $x=-\dfrac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=-\dfrac{\pi}{4}$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=\dfrac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в силу непрерывности функции y в этой точке, получаем, что $x=\dfrac{\pi}{4}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$ может достигаться в одной из двух точек $x=-\dfrac{\pi}{3}$ или $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Найдем значения данной функции в этих точках:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=10\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)-5\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2{,}5\pi+12=$$
$$=5\sqrt{3}+12-17{,}5\pi<0.$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=10\cdot\frac{\pi}{4}-5\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-2{,}5\pi+12=7$$

Так как $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>y\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, то

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=7.$$

Ответ: 7.

***

4.76.1.(прототип 26708) Найдите наименьшее значение функции $y=2\mathrm{tg}x-4x+\pi-3$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

4.76.2.(3735) Найдите наименьшее значение функции $y=8\mathrm{tg}x-16x+4\pi-5$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

4.76.3.(70737) Найдите наименьшее значение функции $y=66\mathrm{tg}x-132x+33\pi+7$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

***

4.77.1.(прототип 26709) Найдите наибольшее значение функции $y=14x-7\mathrm{tg}x-3{,}5\pi+11$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

4.77.2.(3755) Найдите наибольшее значение функции $y = 2x - \text{tg}x - 0{,}5\pi + 13$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4.77.3.(70785) Найдите наибольшее значение функции $y = 110x - 55\text{tg}x - 27{,}5\pi - 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

***

4.78.1.(прототип 77494) Найдите наибольшее значение функции $y = -2\text{tg}x + 4x - \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4.78.2.(132169) Найдите наибольшее значение функции $y = -3\text{tg}x + 6x - 1{,}5\pi + 14$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4.78.3.(132217) Найдите наибольшее значение функции $y = -12\text{tg}x + 24x - 6\pi + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

***

4.79.1.(прототип 77495) Найдите наименьшее значение функции $y = -14x + 7\text{tg}x + \frac{7\pi}{2} + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4.79.2.(132219) Найдите наименьшее значение функции $y = -4x + 2\text{tg}x + \pi + 16$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4.79.3.(132259) Найдите наименьшее значение функции $y = -24x + 12\text{tg}x + 6\pi + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Первообразная функции

• Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

• Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

<u>Таблица интегралов</u>

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg}\, x + C$$

<u>Правила интегрирования</u>

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, где c – постоянная

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

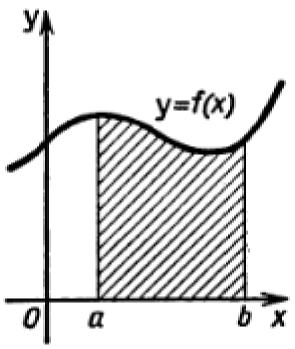
<u>Формула Ньютона-Лейбница</u>

Для непрерывной функции $y = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.



Пример 30. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^2+4}$ проходит через точку $(-3;6)$. Найдите $F(3)$.

Решение. Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x \in R$. Используя формулу разности квадратов, упростим выражение $\dfrac{x^4-16}{x^2+4}=\dfrac{\left(x^2\right)^2-4^2}{x^2+4}=x^2-4$.

Для функции $f(x)=x^2-4$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x+C$. Так как по условию $F(-3)=6$, то получаем уравнение $6=\dfrac{(-3)^3}{3}-4(-3)+C$. Отсюда находим $C=3$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x+3$. Найдем значение $F(3)=\dfrac{3^3}{3}-4\cdot 3+3=0$.

Ответ: 0.

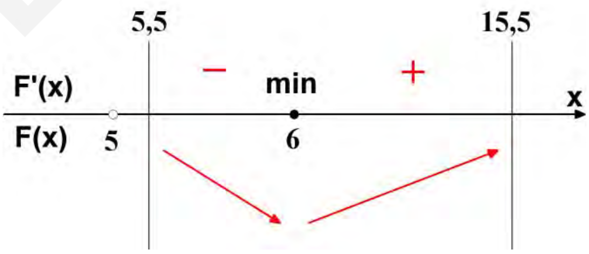
Пример 31. В какой точке отрезка $[5,5;15,5]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=\log_5(x-5)$ достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

Решение. 1) Функция $f(x)$ определена при $x>5$.

2) По определению первообразной $F'(x)=f(x)=\log_5(x-5)$.

3) Решая уравнение $F'(x)=0$ или $\log_5(x-5)=0$, находим критическую точку $x=6$ функции $F(x)$ на отрезке $[5,5;15,5]$.

4) Расставляем знаки производной $F'(x)$ или функции $f(x)$ на каждом из промежутков $[5,5;6)$ и $(6;15,5]$. Например, $f(7)=\log_5 2>0$. Ставим знак «+» на промежутке $(6;15,5]$. На промежутке $[5,5;6)$ ставим знак «–», используя свойство знакочередования функции $f(x)$ (см. рисунок).



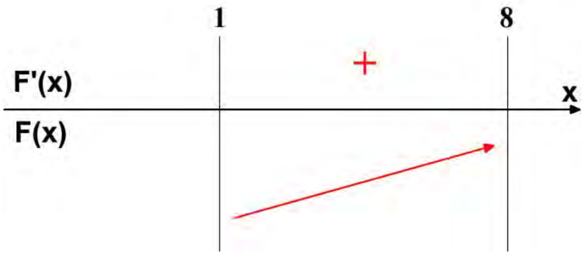
При переходе через критическую точку $x=6$ производная $F'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции $F(x)$ в этой точке, получаем, что $x=6$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции $F(x)$ на отрезке $[5,5;15,5]$ достигается в точке $x=6$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке.

Ответ:6.

Пример 32. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=8\sqrt[3]{x}+7$ на отрезке $[1;8]$ равно 96. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

Решение. 1) Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x \in R$.
2) По определению первообразной $F'(x) = f(x) = 8\sqrt[3]{x} + 7$.
3) Так как $8\sqrt[3]{x} + 7 > 0$ на отрезке $[1;8]$, то функция $F(x)$ возрастает на этом отрезке. Значит, функция $F(x)$ достигает наибольшего значения при $x = 8$, а наименьшего значения при $x = 1$.



Для функции $f(x) = 8\sqrt[3]{x} + 7$ одна из первообразных имеет вид $F(x) = 6x^{\frac{4}{3}} + 7x + C$. Так как по условию $F(8) = 96$, то получаем уравнение $96 = 6 \cdot 8^{\frac{4}{3}} + 7 \cdot 8 + C$. Отсюда находим $C = -56$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x) = 6x^{\frac{4}{3}} + 7x - 56$. Найдем искомое значение $F(1) = 6x^{\frac{4}{3}} + 7x - 56 = -43$.
Ответ: –43.

***

5.1.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 11x + 5$ в точке 0 равно 6. Найдите $F(-3)$.

5.1.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -5x + 8$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(4)$.

5.1.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$ в точке 4 равно 5. Найдите $F(1)$.

***

5.2.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ в точке 0 равно 4. Найдите $F(4)$.

5.2.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 2x^2 + 9x - 4$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-3)$.

5.2.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -6x^2 - 2x + 5$ в точке 0 равно 9. Найдите $F(5)$.

***

5.3.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ в точке 0 равно –5. Найдите $F(2)$.

5.3.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -x^3 + 10x - 7$ в точке 0 равно 12. Найдите $F(-2)$.

5.3.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{x^3}{5} - 3x^2 + 7x - 8$ в точке 0 равно –21. Найдите $F(5)$.

***

5.4.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 9x^8$ в точке 0 равно –13. Найдите $F(-1)$.

5.4.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -18x^4$ в точке 0 равно 17. Найдите $F(2)$.

5.4.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 13x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$ в точке 0 равно 1. Найдите $F(-1)$.

***

5.5.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{7}{x}$ в точке 1 равно –11. Найдите $F(e^2)$.

5.5.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -\dfrac{10}{x}$ в точке e равно 8. Найдите $F(e^4)$.

5.5.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=\frac{4}{x}$ в точке -3 равно $4\ln 3-2$. Найдите $F(-1)$.

***

5.6.1. Найдите значение первообразной $F(-0,5)$ функции $f(x)=\frac{8}{4x+3}$, на промежутке $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$, если известно, что $F(0)=2\ln 3-5$.

5.6.2. Найдите значение первообразной $F(3)$ функции $f(x)=\frac{3}{2x^2}$, на промежутке $(0;+\infty)$, если известно, что $F(0,5)=5$.

5.6.3. Найдите значение первообразной $F(0,5)$ функции $f(x)=\frac{4x^2-3}{x^2}$, на промежутке $(-\infty;0)$, если известно, что $F(0,25)=-11$.

***

5.7.1. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=6\sqrt{x}+5$ на промежутке $(0;+\infty)$ проходит через точку $(1;9)$. Найдите $F(4)$.

5.7.2. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+1$ на промежутке $(0;+\infty)$ проходит через точку $(4;13)$. Найдите $F(1)$.

5.7.3. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=4\sqrt[3]{x}+5$ проходит через точку $(8;94)$. Найдите $F(1)$.

***

5.8.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=6e^x$ в точке 0 равно –18. Найдите $F(\ln 3)$.

5.8.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-8e^x$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(\ln 7)$.

5.8.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=12e^x$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-\ln 5)$.

***

5.9.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-5\sin x$ в точке 0 равно 17. Найдите $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5.9.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=11\sin x$ в точке π равно –9. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

5.9.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=21\sin x$ в точке π равно 6. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

***

5.10.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=8\cos x$ в точке $-\pi$ равно 13. Найдите $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

5.10.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=10\cos x$ в точке $\frac{\pi}{2}$ равно –4. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

5.10.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=3-2\cos 2x$ в точке $\frac{\pi}{2}$ равно $\frac{3\pi}{4}$. Найдите $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

***

5.11.1. В какой точке отрезка $[0;8]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-3x-4$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

5.11.2. В какой точке отрезка $[-3;3]$ первообразная $F(x)$ для функции

$f(x)=(3^x-3)(x-4)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

5.11.3. В какой точке отрезка $[-13;7]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=4\sin^{50}x+5\cos^{60}x+6$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

***

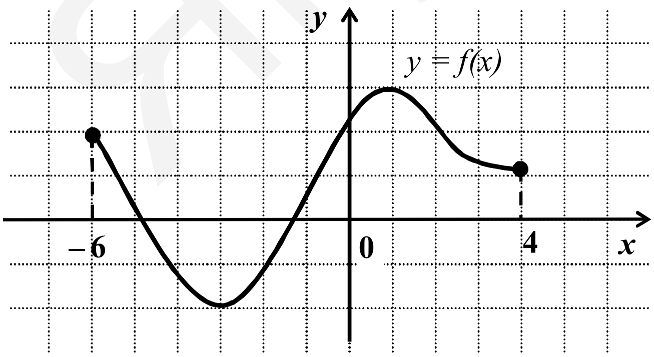
5.12.1. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-2x-3$ на отрезке $[0;6]$ равно –9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

5.12.2. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2-14x+11$ на отрезке $[0;2]$ равно 1. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

5.12.3. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-2x+18$ на отрезке $[3;6]$ равно 64. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

6. Дополнительные задачи

1. Функция $y=f(x)$ задана на промежутке $[-6;4]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все точки экстремума.



1) $[-6;0]$; 2) $[0;4]$; 3) $[-2;3]$; 4) $[-3;1]$.

2. Найдите точки максимума и минимума функций и соответствующие экстремумы функций:

а) $y=x^2-6x+13$; **б)** $y=x^2-4$;
в) $y=2x^2-6x+7$; **г)** $y=-x^2+8$;
д) $y=-x^2+3x-8$; **е)** $y=|x|-2$;
ж) $y=|x-3|+4$; **з)** $y=5-|x+2|$.

3. Найдите точку минимума функции $f(x)=\log_2\left(x^2-7x+13\right)$.

4. При каком значении m функция $y=\sqrt[3]{5x^2+mx-3}$ имеет минимум в точке $x=1{,}3$?

5. При каком значении a функция $y=\left(\dfrac{4}{7}\right)^{10x^2+2ax+5}$ имеет максимум в точке с абсциссой 0,12?

6. Найдите наибольшее значение функции на промежутке $[-2;4]$:
а) $y=-4x+3$; **б)** $y=2x+5$.

7. Найдите наименьшее значение функции на промежутке $[1;7]$:
а) $y=-\dfrac{4}{x}$; **б)** $y=\dfrac{14}{x}+2$.

8. Укажите наименьшее значение функции $y=3-\log_4\left(2^{-x}\right)$ на отрезке $[-1;3]$.

9. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{40}{2^x+3^x}$ на промежутке $[1;7]$.

10. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции:
а) $y=2{,}6\log_{\frac{1}{5}}\left(25-4x^2\right)$ на отрезке $[-2;\sqrt{5}]$;
б) $y=2^{\frac{1}{3}x^2-1}$ на отрезке $[-3;1]$.

11. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=6\sin^2x-10\cos^2x-16\sin x+13$$

на числовой оси.

12. Укажите наибольшее целое значение функции

$$y=2{,}5\sqrt{-5\cos4x+8\cos^2 2x+7}.$$

13. Укажите наибольшее целое значение функции $y=2\cdot5^{2\sin^2x+5\cos^2x-1}$.

14. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, если $x \in \left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

15. При каком наибольшем отрицательном значении a функция $y = \sin\left(25x + \dfrac{a\pi}{100}\right)$ имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

16. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 2x\,|\,x - 2\,|$ на отрезке $[0;3]$.

17. Найдите наименьшее значение функции
$$f(x) = \left|\sqrt{4 - x^2} - 6\right| + \sqrt{4 - x^2} + x^4 - 4x^3.$$

Решение заданий-прототипов

1. Исследование функции без производной. Точки экстремума функции

1.1.1. *Решение*. Квадратичная функция $p(x)=4-4x-x^2$ $(a=-1; a<0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{-4}{2\cdot(-1)}=-2$ максимум $p(-2)=4-4(-2)-(-2)^2=8$. Так как функция $y=\sqrt{t}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и $8\in[0;+\infty)$, то данная функция имеет максимум в точке -2.
Ответ: –2.

1.2.1. *Решение*. Квадратичная функция $p(x)=x^2-6x+11$ $(a=1; a>0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{-6}{2\cdot 1}=3$ минимум $p(3)=3^2-6\cdot 3+11=2$. Так как функция $y=\sqrt{t}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и $2\in[0;+\infty)$, то данная функция имеет минимум в точке 3.
Ответ: 3.

1.3.1. *Решение*. Квадратичная функция $p(x)=2+2x-x^2$ $(a=-1; a<0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{2}{2\cdot(-1)}=1$ максимум $p(1)=2+2\cdot 1-1^2=3$. Так как функция $y=\log_2 t$ возрастает на $(0;+\infty)$ и $3\in(0;+\infty)$, то данная функция имеет максимум в точке 1.
Ответ: 1.

1.4.1. *Решение*. Квадратичная функция $p(x)=x^2-6x+12$ $(a=1; a>0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{-6}{2\cdot 1}=3$ минимум $p(3)=3^2-6\cdot 3+12=3$. Так как функция $y=\log_5 t$ возрастает на $(0;+\infty)$ и $3\in(0;+\infty)$, то данная функция имеет минимум в точке 3.
Ответ: 3.

1.5.1. *Решение*. Квадратичная функция $p(x)=6x-x^2$ $(a=-1; a<0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{6}{2\cdot(-1)}=3$ максимум Так как функция $y=11^t$ возрастает на $(-\infty;\infty)$, то данная функция имеет максимум в точке 3.
Ответ: 3.

1.6.1. *Решение*. Квадратичная функция $p(x)=x^2+2x+3$ $(a=1; a>0)$ имеет в точке $x=-\dfrac{2}{2\cdot 1}=-1$ минимум. Так как функция $y=7^t$ возрастает на $(-\infty;\infty)$, то данная функция имеет минимум в точке -1.
Ответ: –1.

2. Исследование функции без производной. Наибольшее и наименьшее значения функции

2.1.1. *Решение*. Из неравенств имеем

$$x^2-6x+13=(x-3)^2+4\ge 4,$$
$$\sqrt{(x-3)^2+4}\ge\sqrt{4},$$
$$\sqrt{(x-3)^2+4}\ge 2.$$

Значит, наименьшее значение данной функции равно 2 и достигается при $x=3$.
Ответ: 2.

2.2.1. *Решение*. Из неравенств на области определения подкоренного выражения имеем

$$5-4x-x^2=9-(x+2)^2\le 9,$$
$$\sqrt{9-(x+2)^2}\le\sqrt{9},$$
$$\sqrt{9-(x+2)^2}\le 3.$$

Значит, наибольшее значение данной функции равно 3 и достигается при $x=-2$.
Ответ: 3.

2.3.1. *Решение*. Из неравенств имеем

$$x^2-6x+10=(x-3)^2+1\ge 1,$$
$$\log_3\left((x-3)^2+1\right)\ge\log_3 1,$$
$$\log_3\left((x-3)^2+1\right)\ge 0,$$
$$\log_3\left((x-3)^2+1\right)+2\ge 2.$$

Значит, наименьшее значение данной функции равно 2 и достигается при $x=3$.
Ответ: 2.

2.4.1. *Решение*. Из неравенств на области определения подлогарифмического выражения имеем

$$4-2x-x^2=5-(x+1)^2\le 5,$$
$$\log_5\left(5-(x+1)^2\right)\le\log_5 5,$$
$$\log_5\left(5-(x+1)^2\right)\le 1,$$
$$\log_5\left(5-(x+1)^2\right)+3\le 4.$$

Значит, наибольшее значение данной функции равно 4 и достигается при $x=-1$.
Ответ: 4.

2.5.1. *Решение*. Из неравенств имеем

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4\ge 4,$$
$$2^{(x+1)^2+4}\ge 2^4,$$
$$2^{(x+1)^2+4}\ge 16.$$

Значит, наименьшее значение данной функции равно 16 и достигается при $x=-1$.
Ответ: 16.

2.6.1. *Решение*. Из неравенств имеем

$$-7-6x-x^2=2-(x+3)^2\le 2,$$
$$3^{2-(x+3)^2}\le 3^2,$$
$$3^{2-(x+3)^2}\le 9.$$

Значит, наибольшее значение данной функции равно 9 и достигается при $x=-3$.
Ответ: 9.

3. Исследование функции с помощью производной Точки экстремума функции

Целые рациональные функции

3.1.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-48$; $D(y')=R$.
3) $y'=0$; $3x^2-48=0$; $x=\pm4$.
4) $y'<0$ в интервале $(-4;4)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=4$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x$; $y''(4)=24>0$; $y''(-4)=-24<0$. Значит, $x=4$ – точка минимума, $x=-4$ – точка максимума.
Ответ: –4.

3.2.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-48$; $D(y')=R$.
3) $y'=0$; $3x^2-48=0$; $x=\pm4$.
4) $y'<0$ в интервале $(-4;4)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=4$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x$; $y''(4)=24>0$; $y''(-4)=-24<0$. Значит, $x=4$ – точка минимума, $x=-4$ – точка максимума.
Ответ: 4.

3.3.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.
2) $y'=12-3x^2$; $D(y')=R$.
3) $y'=0$; $12-3x^2=0$; $x=\pm2$.
4) $y'>0$ в интервале $(-2;2)$; $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-2$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=2$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-6x$; $y''(2)=-12<0$; $y''(-2)=12>0$. Значит, $x=-2$ – точка минимума, $x=2$ – точка максимума.
Ответ: 2.

3.4.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.
2) $y'=12-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $12-3x^2=0$; $x=\pm 2$.

4) $y'>0$ в интервале $(-2;2)$; $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-2$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=2$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-6x$; $y''(2)=-12<0$; $y''(-2)=12>0$. Значит, $x=-2$ – точка минимума, $x=2$ – точка максимума.

Ответ: –2.

3.5.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2-6x$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2-6x=0$; $x=0, x=2$.

4) $y'<0$ в интервале $(0;2)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x-6$; $y''(2)=6>0$; $y''(0)=-6<0$. Значит, $x=2$ – точка минимума, $x=0$ – точка максимума.

Ответ: 0.

3.6.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2-6x$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2-6x=0$; $x=0, x=2$.

4) $y'<0$ в интервале $(0;2)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x-6$; $y''(2)=6>0$; $y''(0)=-6<0$. Значит, $x=2$ – точка минимума, $x=0$ – точка максимума.

Ответ: 2.

3.7.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2+4x+1$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2+4x+1=0$; $x=-1, x=-\frac{1}{3}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-1)$ и $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

При переходе через критическую точку $x=-1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-1$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{1}{3}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-\frac{1}{3}$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x+4$; $y''\left(-\frac{1}{3}\right)=2>0$; $y''(-1)=-2<0$. Значит, $x=-\frac{1}{3}$ – точка минимума, $x=-1$ – точка максимума.

Ответ: –1.

3.8.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2-4x+1$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2-4x+1=0$; $x=1, x=\frac{1}{3}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(\frac{1}{3};1\right)$; $y'>0$ в интервалах $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ и $(1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=\frac{1}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=\frac{1}{3}$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=1$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x-4$; $y''(1)=2>0$; $y''\left(\frac{1}{3}\right)=-2<0$. Значит, $x=1$ – точка минимума, $x=\frac{1}{3}$ – точка максимума.

Ответ: 1.

3.9.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2-10x+7$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2-10x+7=0$; $x=1$; $x=\frac{7}{3}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(1;\frac{7}{3}\right)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;1)$ и $\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=1$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=\frac{7}{3}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\frac{7}{3}$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x-10$; $y''\left(\frac{7}{3}\right)=4>0$; $y''(1)=-4<0$. Значит, $x=\frac{7}{3}$ – точка минимума, $x=1$ – точка максимума.

Ответ: 1.

3.10.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2+10x+7$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $3x^2+10x+7=0$;

$x=-1$; $x=-\frac{7}{3}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(-\frac{7}{3};-1\right)$; $y'>0$ в интервалах $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)$ и $(-1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{7}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-\frac{7}{3}$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=-1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-1$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x+10$; $y''(-1)=4>0$; $y''\left(-\frac{7}{3}\right)=-4<0$. Значит, $x=-1$ – точка минимума, $x=-\frac{7}{3}$ – точка максимума.

Ответ: –1.

3.11.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=18x-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $18x-3x^2=0$; $x=0$, $x=6$.

4) $y'>0$ в интервале $(0;6)$; $y'<0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(6;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=0$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=6$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=6$ – точка максимума.

По-другому, $y''=18-6x$; $y''(6)=-18<0$; $y''(0)=18>0$. Значит, $x=0$ – точка минимума, $x=6$ – точка максимума.

Ответ: 6.

3.12.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=18x-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $18x-3x^2=0$; $x=0, x=6$.

4) $y'>0$ в интервале $(0;6)$; $y'<0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(6;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=0$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=6$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=6$ – точка максимума.

По-другому, $y''=18-6x$; $y''(6)=-18<0$; $y''(0)=18>0$. Значит, $x=0$ – точка минимума, $x=6$ – точка максимума.

Ответ: 0.

3.13.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=x^2-9$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $x^2-9=0$; $x=\pm3$.

4) $y'<0$ в интервале $(-3;3)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-3)$ и $(3;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-3$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=3$ – точка минимума.

По-другому, $y''=2x$; $y''(3)=6>0$; $y''(-3)=-6<0$. Значит, $x=3$ – точка минимума, $x=-3$ – точка максимума.

Ответ: –3.

3.14.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=x^2-9$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $x^2-9=0$; $x=\pm3$.

4) $y'<0$ в интервале $(-3;3)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-3)$ и $(3;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-3$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=3$ – точка минимума.

По-другому, $y''=2x$; $y''(3)=6>0$; $y''(-3)=-6<0$. Значит, $x=3$ – точка минимума, $x=-3$ – точка максимума.

Ответ: 3.

3.15.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=9-x^2$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $9-x^2=0$; $x=\pm3$.

4) $y'>0$ в интервале $(-3;3)$; $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-3)$ и $(3;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-3$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=3$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=3$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-2x$; $y''(3)=-6<0$; $y''(-3)=6>0$. Значит, $x=-3$ – точка минимума, $x=3$ – точка максимума.

Ответ: 3.

3.16.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=9-x^2$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $9-x^2=0$; $x=\pm3$.

4) $y'>0$ в интервале $(-3;3)$; $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-3)$ и $(3;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-3$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=3$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=3$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-2x$; $y''(3)=-6<0$; $y''(-3)=6>0$. Значит, $x=-3$ – точка минимума, $x=3$ – точка максимума.

Ответ: –3.

3.17.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2$;

$y'=(x-2)(3x-10)$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $(x-2)(3x-10)=0$;

$x=2$; $x=\dfrac{10}{3}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(2;\dfrac{10}{3}\right)$; $y'>0$ в интервалах $(-\infty;2)$ и $\left(\dfrac{10}{3};+\infty\right)$.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=2$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=\dfrac{10}{3}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\dfrac{10}{3}$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x-16$; $y''\left(\frac{10}{3}\right)=4>0$; $y''(2)=-4<0$. Значит, $x=\frac{10}{3}$ – точка минимума, $x=2$ – точка максимума.

Замечание. Можно многочлен для функции привести к стандартному виду

$$(x-2)^2(x-4)+5=$$
$$=x^3-8x^2+20x-11,$$

а затем найти производную функции.

Ответ: 2.

3.18.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=2(x+3)(x+5)+(x+3)^2$;

$y'=(x+3)(3x+13)$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $(x+3)(3x+13)=0$;

$x=-3$; $x=-\frac{13}{3}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(-\frac{13}{3};-3\right)$; $y'>0$ в интервалах $\left(-\infty;-\frac{13}{3}\right)$ и $(-3;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{13}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-\frac{13}{3}$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-3$ – точка минимума.

По-другому, $y''=6x+22$; $y''(-3)=4>0$; $y''\left(-\frac{13}{3}\right)=-4<0$. Значит, $x=-3$ – точка минимума, $x=-\frac{13}{3}$ – точка максимума.

Замечание. Можно многочлен для функции привести к стандартному виду

$$(x+3)^2(x+5)-1=$$
$$=x^3+11x^2+39x+44,$$

а затем найти производную функции.

Ответ: –3.

<u>Дробные рациональные функции</u>

3.19.1. *Решение.*

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y'=-\frac{16}{x^2}+1$; $y'=\frac{x^2-16}{x^2}$.

$D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$$\frac{x^2-16}{x^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-16=0,\\x\neq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4,\\x=4.\end{array}\right.$$

4) $y'<0$ в интервалах $(-4;0)$ и $(0;4)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=4$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\frac{32}{x^3}$; $y''(4)=0{,}5>0$; $y''(-4)=-0{,}5<0$. Значит, $x=4$ – точка минимума, $x=-4$ – точка максимума.

Ответ: –4.

3.20.1. *Решение.*

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $y'=-\frac{25}{x^2}+1$; $y'=\frac{x^2-25}{x^2}$.

$D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$$\frac{x^2-25}{x^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-25=0,\\x\neq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,\\x=5.\end{array}\right.$$

4) $y'<0$ в интервалах $(-5;0)$ и $(0;5)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-5)$ и $(5;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-5$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-5$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=5$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\frac{50}{x^3}$; $y''(5)=0,4>0$; $y''(-5)=-0,4<0$. Значит, $x=5$ – точка минимума, $x=-5$ – точка максимума.
Ответ: 5.

3.21.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) $y'=-\frac{x'\cdot(x^2+289)-(x^2+289)'\cdot x}{(x^2+289)^2}$;

$y'=-\frac{x^2+289-2x^2}{(x^2+289)^2}$; $y'=\frac{x^2-289}{(x^2+289)^2}$.

$D(y')=(-\infty;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$\frac{x^2-289}{(x^2+289)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-289=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=17, \\ x=-17. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервале $(-17;17)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-17)$ и $(17;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-17$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-17$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=17$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=17$ – точка минимума.
Ответ: –17.

3.22.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) $y'=-\frac{x'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot x}{(x^2+1)^2}$;

$y'=-\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$; $y'=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

$D(y')=(-\infty;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервале $(-1;1)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-1$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=1$ – точка минимума.
Ответ: 1.

3.23.1. *Решение.*
1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) Так как $-\frac{x^2+289}{x}=-x-\frac{289}{x}$, то $y'=-1+\frac{289}{x^2}$; $y'=-\frac{x^2-289}{x^2}$.

$D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$-\frac{x^2-289}{x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-289=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-17, \\ x=17. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-17)$ и $(17;+\infty)$, $y'>0$ в интервалах $(-17;0)$ и $(0;17)$.

При переходе через критическую точку $x=-17$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-17$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=17$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=17$ – точка максимума.
Ответ: 17.

3.24.1. *Решение.*
1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) Так как $-\frac{x^2+1}{x}=-x-\frac{1}{x}$, то $y'=-1+\frac{1}{x^2}$; $y'=-\frac{x^2-1}{x^2}$.

$D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$-\frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$, $y'>0$ в интервалах $(-1;0)$ и $(0;1)$.

При переходе через критическую точку $x=-1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-1$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с плю-

са на минус. Значит, $x=1$ – точка максимума.
Ответ: –1.

Функции, содержащие степенные и иррациональные выражения

3.25.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.

2) $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3=0$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$.

4) $y'<0$ в промежутке $[0;4)$, $y'>0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=4$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$; $y''(4)=\frac{3}{8}>0$.

Значит, $x=4$ – точка минимума.
Ответ: 4.

3.26.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.

2) $y'=6-3x^{\frac{1}{2}}$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $6-3x^{\frac{1}{2}}=0$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$.

4) $y'>0$ в промежутке $[0;4)$, $y'<0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=4$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-\frac{3}{2\sqrt{x}}$; $y''(4)=-\frac{3}{4}<0$.

Значит, $x=4$ – точка максимума.
Ответ: 4.

3.27.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.

2) $y'=x^{\frac{1}{2}}-2$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $x^{\frac{1}{2}}-2=0$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$.

4) $y'<0$ в промежутке $[0;4)$, $y'>0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=4$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y''(4)=\frac{1}{4}>0$.

Значит, $x=4$ – точка минимума.
Ответ: 4.

3.28.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.

2) $y'=-x^{\frac{1}{2}}+3$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $3-x^{\frac{1}{2}}=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$.

4) $y'>0$ в промежутке $[0;9)$, $y'<0$ в интервале $(9;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=9$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=9$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y''(9)=-\frac{1}{6}<0$.

Значит, $x=9$ – точка максимума.
Ответ: 9.

3.29.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+1$.

2) $y'=x^{\frac{1}{2}}-2$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $x^{\frac{1}{2}}-2=0$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$.

4) $y'<0$ в промежутке $[0;4)$, $y'>0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=4$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y''(4)=\frac{1}{4}>0$.

Значит, $x=4$ – точка минимума.
Ответ: 4.

3.30.1. *Решение.*

1) $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$.

2) $y'=-x^{\frac{1}{2}}+3$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $3-x^{\frac{1}{2}}=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$.

4) $y' > 0$ в промежутке $[0;9)$, $y' < 0$ в интервале $(9;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = 9$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = 9$ – точка максимума.

По-другому, $y'' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $y''(9) = -\dfrac{1}{6} < 0$.

Значит, $x = 9$ – точка максимума.
Ответ: 9.

3.31.1. *Решение.* 1) $D(y) = [0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$.

2) $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3$; $D(y') = [0;+\infty)$.

3) $y' = 0$; $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$; $\sqrt{x} = 2$; $x = 4$.

4) $y' < 0$ в промежутке $[0;4)$, $y' > 0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 4$ – точка минимума.

По-другому, $y'' = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$; $y''(4) = \dfrac{3}{8} > 0$.

Значит, $x = 4$ – точка минимума.
Ответ: 4.

3.32.1. *Решение.* 1) $D(y) = [0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

2) $y' = 6 - 3x^{\frac{1}{2}}$; $D(y') = [0;+\infty)$.

3) $y' = 0$; $6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 0$; $\sqrt{x} = 2$; $x = 4$.
4) $y' > 0$ в промежутке $[0;4)$, $y' < 0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = 4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = 4$ – точка максимума.

По-другому, $y'' = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; $y''(4) = -\dfrac{3}{4} < 0$.

Значит, $x = 4$ – точка максимума.
Ответ: 4.

Функции, содержащие показательные выражения

3.33.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = e^{x-16}(x+17)$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $e^{x-16}(x+17) = 0$; $x = -17$.

4) $y' < 0$ в интервале $(-\infty;-17)$, $y' > 0$ в интервале $(-17;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = -17$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = -17$ – точка минимума.

По-другому, $y'' = e^{x-16}(x+18)$; $y''(-17) = e^{-23} > 0$. Значит, $x = -17$ – точка минимума.
Ответ: –17.

3.34.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = e^{x+9}(8-x)$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $e^{x+9}(8-x) = 0$; $x = 8$.

4) $y' > 0$ в интервале $(-\infty;8)$, $y' < 0$ в интервале $(8;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = 8$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = 8$ – точка максимума.

По-другому, $y'' = e^{x+9}(7-x)$;

$y''(8) = -e^{17} < 0$. Значит, $x = 8$ – точка максимума.
Ответ: 8.

3.35.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = e^{3-x}(x-4)$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $e^{3-x}(x-4) = 0$; $x = 4$.

4) $y' < 0$ в интервале $(-\infty;4)$, $y' > 0$ в интервале $(4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 4$ – точка минимума.

По-другому, $y'' = e^{3-x}(5-x)$;

$y''(4) = e^{-1} > 0$. Значит, $x = 4$ – точка минимума.
Ответ: 4.

3.36.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y'=e^{16-x}(-15-x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{16-x}(-15-x)=0$; $x=-15$.

4) $y'>0$ в интервале $(-\infty;-15)$, $y'<0$ в интервале $(-15;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-15$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-15$ – точка максимума.

По-другому, $y''=e^{16-x}(x+14)$;

$y''(-15)=-e^{31}<0$. Значит, $x=-15$ – точка максимума.

Ответ: –15.

3.37.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-36}(3x^2-30x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-36}(3x^2-30x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=10. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервале $(0;10)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(10;\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=10$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=10$ – точка минимума.

По-другому, $y''=e^{x-36}(3x^2-24x-30)$; $y''(0)=-30e^{-36}<0$; $y''(10)=30e^{-26}>0$. Значит, $x=0$ – точка максимума, а $x=10$ – точка минимума.

Ответ: 10.

3.38.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x+36}(3x^2-30x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x+36}(3x^2-30x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=10. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервале $(0;10)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(10;\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=10$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=10$ – точка минимума.

По-другому, $y''=e^{x+36}(3x^2-24x-30)$; $y''(0)=-30e^{36}<0$, $y''(10)=30e^{46}>0$. Значит, $x=0$ – точка максимума, $x=10$ – точка минимума.

Ответ: 0.

3.39.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{6-x}(-x^2+10x-16)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{6-x}(-x^2+10x-16)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=8. \end{array}\right.$

4) $y'>0$ в интервале $(2;8)$, $y'<0$ в интервалах $(-\infty;2)$ и $(8;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=8$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=8$ – точка максимума.

По-другому, $y''=e^{6-x}(x^2-12x+26)$; $y''(2)=6e^4>0$, $y''(8)=-6e^{-2}<0$. Значит, $x=2$ – точка минимума, $x=8$ – точка максимума.

Ответ: 2.

3.40.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{5-x}(-x^2+12x-20)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{5-x}(-x^2+12x-20)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-12x+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=10. \end{array}\right.$

4) $y'>0$ в интервале $(2;10)$, $y'<0$ в интервалах $(-\infty;2)$ и $(10;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=10$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=10$ – точка максимума.

По-другому, $y''=e^{5-x}(x^2-14x+32)$; $y''(2)=8e^3>0$; $y''(10)=-8e^{-5}<0$. Значит, $x=2$ – точка минимума, а $x=10$ – точка максимума.

Ответ: 10.

3.41.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-6}(x^2-2x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-6}(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервале $(0;2)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

По-другому, $y''=e^{x-6}(x^2-2)$; $y''(0)=-2e^{-6}<0$; $y''(2)=2e^{-4}>0$. Значит, $x=0$ – точка максимума, а $x=2$ – точка минимума.

Ответ: 0.

3.42.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-5}(x^2-2x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-5}(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$

4) $y'<0$ в интервале $(0;2)$, $y'>0$ в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

По-другому, $y''=e^{x-5}(x^2-2)$; $y''(0)=-2e^{-5}<0$; $y''(2)=2e^{-3}>0$. Значит, $x=0$ – точка максимума, а $x=2$ – точка минимума.

Ответ: 2.

3.43.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{4-x}(-x^2-10x-24)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{4-x}(-x^2-10x-24)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+10x+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-4. \end{array}\right.$

4) $y'>0$ в интервале $(-6;-4)$, $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-6)$ и $(-4;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-6$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-6$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4$ – точка максимума.

По-другому, $y''=e^{4-x}(x^2+8x+14)$; $y''(-6)=2e^{10}>0$; $y''(-4)=-2e^{8}<0$. Значит, $x=-6$ – точка минимума, а $x=-4$ – точка максимума.

Ответ: –4.

3.44.2. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{2-x}(-x^2-4x-3)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{2-x}(-x^2-4x-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-1. \end{array}\right.$

4) $y'>0$ в интервале $(-3;-1)$, $y'<0$ в интервалах $(-\infty;-3)$ и $(-1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-3$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=-1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-1$ – точка максимума.

По-другому, $y''=e^{2-x}(x^2+2x-1)$; $y''(-3)=2e^{5}>0$; $y''(-1)=-2e^{3}<0$. Значит, $x=-3$ – точка минимума, а $x=-1$ – точка максимума.

Ответ: –3.

Функции, содержащие логарифмические выражения

3.45.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-3;+\infty)$.

2) $y'=2-\dfrac{1}{x+3}$; $y'=\dfrac{2x+5}{x+3}$.

$D(y')=(-3;+\infty)$.

3) $y'=0$.

$$\frac{2x+5}{x+3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5=0, \\ x>-3. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2{,}5.$$

4) $y'<0$ в интервале $(-3;-2{,}5)$, $y'>0$ в интервале $(-2{,}5;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-2,5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-2,5$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\dfrac{1}{(x+3)^2}$;

$y''(-2,5)=4>0$. Значит, $x=-2,5$ – точка минимума.

Ответ: –2,5.

3.46.1. *Решение*. 1) $D(y)=(-5;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{1}{x+5}-2$; $y'=\dfrac{-2x-9}{x+5}$.

$D(y')=(-5;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{-2x-9}{x+5}=0\\ x>-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-9=0,\\ x>-5.\end{cases}\Leftrightarrow x=-4,5.$$

4) $y'>0$ в интервале $(-5;-4,5)$, $y'<0$ в интервале $(-4,5;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-4,5$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4,5$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-\dfrac{1}{(x+5)^2}$;

$y''(-4,5)=-4<0$. Значит, $x=-4,5$ – точка максимума.

Ответ: –4,5.

3.47.1. *Решение*. 1) $D(y)=(-7;+\infty)$.

2) $y'=4-\dfrac{4}{x+7}$; $y'=\dfrac{4x+24}{x+7}$.

$D(y')=(-7;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{4x+24}{x+7}=0\\ x>-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+24=0,\\ x>-7.\end{cases}\Leftrightarrow x=-6.$$

4) $y'<0$ в интервале $(-7;-6)$, $y'>0$ в интервале $(-6;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-6$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-6$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\dfrac{4}{(x+7)^2}$;

$y''(-6)=4>0$. Значит, $x=-6$ – точка минимума.

Ответ: –6.

3.48.1. *Решение*. 1) $D(y)=(-7;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{8}{x+7}-8$; $y'=\dfrac{-8x-48}{x+7}$.

$D(y')=(-7;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{-8x-48}{x+7}=0\\ x>-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x-48=0,\\ x>-7.\end{cases}\Leftrightarrow x=-6.$$

4) $y'>0$ в интервале $(-7;-6)$, $y'<0$ в интервале $(-6;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-6$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-6$ – точка максимума.

По-другому, $y''=-\dfrac{8}{(x+7)^2}$;

$y''(-6)=-8<0$. Значит, $x=-6$ – точка максимума.

Ответ: –6.

3.49.1. *Решение*. 1) $D(y)=(-3;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=3x-3\ln(x+3)$.

2) $y'=3-\dfrac{3}{x+3}$; $y'=\dfrac{3x+6}{x+3}$.

$D(y')=(-3;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{3x+6}{x+3}=0\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+6=0,\\ x>-3.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2.$$

4) $y'<0$ в интервале $(-3;-2)$, $y'>0$ в интервале $(-2;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=-2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-2$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\dfrac{3}{(x+3)^2}$;

$y''(-2)=3>0$. Значит, $x=-2$ – точка минимума.

Ответ: –2.

3.50.1. *Решение*. 1) $D(y)=(-5;+\infty)$.

Запишем функцию в виде $y = 5\ln(x+5) - 5x$.

2) $y' = \frac{5}{x+5} - 5$; $y' = \frac{-5x-20}{x+5}$.
$D(y') = (-5; +\infty)$.

3) $y' = 0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases} \frac{-5x-20}{x+5} = 0 \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-20 = 0, \\ x > -5. \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

4) $y' > 0$ в интервале $(-5; -4)$, $y' < 0$ в интервале $(-4; +\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = -4$ – точка максимума.

По-другому, $y'' = -\frac{5}{(x+5)^2}$;
$y''(-4) = -5 < 0$. Значит, $x = -4$ – точка максимума.

Ответ: –4.

3.51.1. *Решение.* 1) $D(y) = (0; +\infty)$.

2) $y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}$; $y' = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x}$.
$D(y') = (0; +\infty)$.

3) $y' = 0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases} \frac{4x^2-5x+1}{x} = 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x+1 = 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0{,}25; \end{array}\right. \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0{,}25. \end{array}\right.$$

4) $y' < 0$ в интервале $(0{,}25; 1)$, $y' > 0$ в интервалах $(0; 0{,}25)$ и $(1; +\infty)$.

При переходе через критическую точку $x = 0{,}25$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = 0{,}25$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 1$ – точка минимума.

По-другому, $y'' = 4 - \frac{1}{x^2}$;
$y''(0{,}25) = -12 < 0$; $y''(1) = 3 > 0$. Значит, $x = 0{,}25$ – точка максимума, а $x = 1$ – точка минимума.

Ответ: 1.

3.52.1. *Решение.* 1) $D(y) = (0; +\infty)$.

2) $y' = 4x - 13 + \frac{9}{x}$; $y' = \frac{4x^2 - 13x + 9}{x}$.
$D(y') = (0; +\infty)$.

3) $y' = 0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases} \frac{4x^2-13x+9}{x} = 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-13x+9 = 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2{,}25; \end{array}\right. \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2{,}25. \end{array}\right.$$

4) $y' > 0$ в интервалах $(0; 1)$ и $(2{,}25; +\infty)$, $y' < 0$ в интервале $(1; 2{,}25)$.

При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = 1$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x = 2{,}25$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 2{,}25$ – точка минимума.

По-другому, $y'' = 4 - \frac{9}{x^2}$; $y''(1) = -5 < 0$;
$y''(2{,}25) = \frac{20}{9} > 0$. Значит, $x = 1$ – точка максимума, а $x = 2{,}25$ – точка минимума.

Ответ: 1.

Функции, содержащие тригонометрические выражения

3.53.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = (3 - 2x)\sin x$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $(3 - 2x)\sin x = 0$; $x = 1{,}5$ или $x = \pi n,\ n \in Z$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ данная функция имеет одну критическую точку $x = 1{,}5$.

4) $y' < 0$ в интервале $\left(1{,}5; \frac{\pi}{2}\right)$, $y' > 0$ в интервале $(0; 1{,}5)$.

При переходе через критическую точку $x=1,5$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=1,5$ – точка максимума.
По-другому, $y''=-2\sin x+(3-2x)\cos x$; $y''(1,5)=-2\sin 1,5<0$. Значит, $x=1,5$ – точка максимума.
Ответ: 1,5.

3.54.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=(x-0,5)\sin x$. $D(y')=R$.
3) $y'=0$; $(x-0,5)\sin x=0$; $x=0,5$ или $x=\pi n,\ n\in Z$. На промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ данная функция имеет одну критическую точку $x=0,5$.
4) $y'>0$ в интервале $\left(0,5;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'<0$ в интервале $(0;0,5)$.

При переходе через критическую точку $x=0,5$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=0,5$ – точка минимума.

По-другому, $y''=\sin x+(x-0,5)\cos x$; $y''(0,5)=\sin 0,5>0$. Значит, $x=0,5$ – точка минимума.
Ответ: 0,5.

4. Исследование функции с помощью производной Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

<u>Целые рациональные функции</u>

4.1.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-27$; $D(y')=R$.
3) $3x^2-27=0$; $x=\pm 3$. На промежутке $[0;4]$ одна критическая точка 3.
4) $y(0)=0$; $y(4)=-44$; $y(3)=-54$.
Следовательно, $\min\limits_{[0;4]} y(x)=y(3)=-54$.
Ответ: –54.

4.2.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-3$; $D(y')=R$.
3) $3x^2-3=0$; $x=\pm 1$. На промежутке $[-2;0]$ одна критическая точка –1.
4) $y(-2)=2$; $y(0)=4$; $y(-1)=6$.
Следовательно, $\max\limits_{[-2;0]} y(x)=y(-1)=6$.
Ответ: 6.

4.3.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-6x$; $D(y')=R$.
3) $3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$ На промежутке $[1;4]$ одна критическая точка 2.
4) $y(1)=0$; $y(4)=18$; $y(2)=-2$.
Следовательно, $\min\limits_{[1;4]} y(x)=y(2)=-2$.
Ответ: –2.

4.4.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-12x$; $D(y')=R$.
3) $3x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4. \end{array}\right.$ На промежутке $[-3;3]$ одна критическая точка 0.
4) $y(-3)=-81$; $y(3)=-27$; $y(0)=0$.
Следовательно, $\max\limits_{[-3;3]} y(x)=y(0)=0$.
Ответ: 0.

4.5.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2-4x+1$; $D(y')=R$.
3) $3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Точка 1 совпадает с концом отрезка $[1;4]$.
4) $y(1)=3$; $y(4)=39$.
Следовательно, $\min\limits_{[1;4]} y(x)=y(1)=3$.
Ответ: 3.

4.6.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.
2) $y'=3x^2+4x+1$; $D(y')=R$.
3) $3x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Точка –1 совпадает с концом отрезка $[-4;-1]$.
4) $y(-4)=-33$; $y(-1)=3$.
Следовательно, $\max\limits_{[-4;-1]} y(x)=y(-1)=3$.
Ответ: 3.

4.7.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2-2x-40$; $D(y')=R$.

3) $3x^2-2x-40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$

Точка 4 совпадает с концом отрезка $[0;4]$.

4) $y(0)=3$; $y(4)=-109$.

Следовательно, $\min\limits_{[0;4]} y(x)=y(4)=-109$.

Ответ: –109.

4.8.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=3x^2+4x-4$; $D(y')=R$.

3) $3x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Точка -2 совпадает с концом отрезка $[-2;0]$.

4) $y(-2)=12$; $y(0)=4$.

Следовательно, $\max\limits_{[-2;0]} y(x)=y(-2)=12$.

Ответ: 12.

4.9.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=12-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $12-3x^2=0$; $x=\pm 2$. Полученные точки –2 и 2 совпадают с концами отрезка $[-2;2]$.

4) $y(-2)=-9$; $y(2)=23$.

Следовательно, $\min\limits_{[-2;2]} y(x)=y(-2)=-9$.

Ответ: –9.

4.10.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=12-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $12-3x^2=0$; $x=\pm 2$. Полученные точки –2 и 2 совпадают с концами отрезка $[-2;2]$.

4) $y(-2)=-9$; $y(2)=23$.

Следовательно, $\max\limits_{[-2;2]} y(x)=y(2)=23$.

Ответ: 23.

4.11.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=18x-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $18x-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6. \end{array}\right.$

На промежутке $[-1;5]$ одна критическая точка 0.

4) $y(-1)=10$; $y(5)=100$; $y(0)=0$.

Следовательно, $\min\limits_{[-1;5]} y(x)=y(0)=0$.

Ответ: 0.

4.12.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=18x-3x^2$; $D(y')=R$.

3) $18x-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6. \end{array}\right.$

На промежутке $[2;10]$ одна критическая точка 6.

4) $y(2)=28$; $y(10)=-100$; $y(6)=108$.

Следовательно, $\max\limits_{[2;10]} y(x)=y(6)=108$.

Ответ: 108.

4.13.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=x^2-9$; $D(y')=R$.

3) $x^2-9=0$; $x=\pm 3$. Полученные точки –3 и 3 совпадают с концами отрезка $[-3;3]$.

4) $y(-3)=11$; $y(3)=-25$.

Следовательно, $\min\limits_{[-3;3]} y(x)=y(3)=-25$.

Ответ: –25.

4.14.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=x^2-9$; $D(y')=R$.

3) $x^2-9=0$; $x=\pm 3$. Полученные точки –3 и 3 совпадают с концами отрезка $[-3;3]$.

4) $y(-3)=11$; $y(3)=-25$.

Следовательно, $\max\limits_{[-3;3]} y(x)=y(-3)=11$.

Ответ: 11.

4.15.1. *Решение.*) 1) $D(y)=R$.

2) $y'=9-x^2$; $D(y')=R$.

3) $9-x^2=0$; $x=\pm 3$. Полученные точки –3 и 3 совпадают с концами отрезка $[-3;3]$.

4) $y(-3)=-13$; $y(3)=23$.

Следовательно, $\min\limits_{[-3;3]} y(x)=y(-3)=-13$.

Ответ: –13.

4.16.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=9-x^2$; $D(y')=R$.

3) $9-x^2=0$; $x=\pm 3$. Полученные точки –3 и 3 совпадают с концами отрезка $[-3;3]$.

4) $y(-3)=-13$; $y(3)=23$.

Следовательно, $\max\limits_{[-3;3]} y(x) = y(3) = 23$.

Ответ: 23.

4.17.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = (x+3)(3x+13)$; $D(y') = R$.

3) $(x+3)(3x+13) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-\dfrac{13}{3}. \end{array}\right.$

На промежутке $[-4;-1]$ одна критическая точка –3.

4) $y(-4) = 0$; $y(-1) = 15$; $y(-3) = -1$.

Следовательно, $\min\limits_{[-4;-1]} y(x) = y(-3) = -1$.

Ответ: –1.

4.18.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = (x-2)(3x-10)$; $D(y') = R$.

3) $(x-2)(3x-10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$

На промежутке $[1;3]$ одна критическая точка 2.

4) $y(1) = 2$; $y(3) = 4$; $y(2) = 5$.

Следовательно, $\max\limits_{[1;3]} y(x) = y(2) = 5$.

Ответ: 5.

4.19.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 5x^4 - 15x^2 - 20$; $D(y') = R$.

3) $5x^4 - 15x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4, \\ x^2=-1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$

На промежутке $[-6;1]$ одна критическая точка –2.

4) $y(-6) = -6576$; $y(1) = -24$; $y(-2) = 48$.

Следовательно, $\max\limits_{[-6;1]} y(x) = y(-2) = 48$.

Ответ: 48.

4.20.1. *Решение.* 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 15x^4 - 60x^2$; $D(y') = R$.

3) $15x^4 - 60x^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x^2=4. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$

На промежутке $[-4;-1]$ одна критическая точка –2.

4) $y(-4) = -1846$; $y(-1) = -37$; $y(-2) = 10$.

Следовательно, $\max\limits_{[-4;-1]} y(x) = y(-2) = 10$.

Ответ: 10.

<u>Дробные рациональные функции</u>

4.21.1. *Решение.*

1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2) $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2}$; $y' = \dfrac{x^2-9}{x^2}$.

$D(y') = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

3) $y' = 0$.

$$\frac{x^2-9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-9=0, \\ x\neq 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3. \end{array}\right.$$

На отрезке $[-4;-1]$ имеется одна критическая точка функции $x=-3$.

4) $y(-4) = -6,25$; $y(-1) = -10$; $y(-3) = -6$.

Следовательно, $\max\limits_{[-4;-1]} y(x) = y(-3) = -6$.

Ответ: –6.

4.22.1. *Решение.*

1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2) $y' = 1 - \dfrac{36}{x^2}$; $y' = \dfrac{x^2-36}{x^2}$.

$D(y') = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

3) $y' = 0$.

$$\frac{x^2-36}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-36=0, \\ x\neq 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=6. \end{array}\right.$$

На отрезке $[1;9]$ имеется одна критическая точка функции $x=6$.

4) $y(1) = 37$; $y(9) = 13$; $y(6) = 12$.

Следовательно, $\min\limits_{[1;9]} y(x) = y(6) = 12$.

Ответ: 12.

4.23.1. *Решение.*

1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Запишем функцию в виде $y = x + \dfrac{25}{x}$.

2) $y' = 1 - \dfrac{25}{x^2}$; $y' = \dfrac{x^2-25}{x^2}$.

$D(y') = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

3) $y' = 0$.

$$\frac{x^2-25}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-25=0, \\ x\neq 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=5. \end{array}\right.$$

На отрезке $[1;10]$ имеется одна критическая точка функции $x=5$.
4) $y(1)=26$; $y(10)=12,5$; $y(5)=10$.
Следовательно, $\min\limits_{[1;10]} y(x)=y(5)=10$.
Ответ: 10.

4.24.1. *Решение.*
1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
Запишем функцию в виде $y=x+\dfrac{25}{x}$.
2) $y'=1-\dfrac{25}{x^2}$; $y'=\dfrac{x^2-25}{x^2}$.
$D(y')=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
3) $y'=0$.
$$\frac{x^2-25}{x^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-25=0,\\ x\neq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=5.\end{array}\right.$$
На отрезке $[-10;-1]$ имеется одна критическая точка функции $x=-5$.
4) $y(-10)=-12,5$; $y(-1)=-26$; $y(-5)=-10$.
Следовательно, $\max\limits_{[-10;-1]} y(x)=y(-5)=-10$.
Ответ: –10.

<u>Функции, содержащие степенные и иррациональные выражения</u>

4.25.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.
2) $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3$; $D(y')=[0;+\infty)$.
3) $y'=0$; $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3=0$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$. На отрезке $[1;9]$ имеется одна критическая точка функции $x=4$.
4) $y(1)=-1$; $y(9)=1$; $y(4)=-3$.
Следовательно, $\min\limits_{[1;9]} y(x)=y(4)=-3$.
Ответ: –3.

4.26.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.
2) $y'=3-3x^{\frac{1}{2}}$; $D(y')=[0;+\infty)$.
3) $y'=0$; $3-3x^{\frac{1}{2}}=0$; $\sqrt{x}=1$; $x=1$. На отрезке $[0;4]$ имеется одна критическая точка функции $x=1$.
4) $y(0)=0$; $y(4)=-4$; $y(1)=1$.
Следовательно, $\max\limits_{[0;4]} y(x)=y(1)=1$.
Ответ: 1.

4.27.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.
2) $y'=x^{\frac{1}{2}}-3$; $D(y')=[0;+\infty)$.
3) $y'=0$; $x^{\frac{1}{2}}-3=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$. Точка 9 совпадает с концом отрезка $[1;9]$.
4) $y(1)=-1\dfrac{1}{3}$; $y(9)=-8$.
Следовательно, $\min\limits_{[1;9]} y(x)=y(9)=-8$.
Ответ: –8.

4.28.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$.
2) $y'=-x^{\frac{1}{2}}+3$; $D(y')=[0;+\infty)$.
3) $y'=0$; $-x^{\frac{1}{2}}+3=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$. Точка 9 совпадает с концом отрезка $[1;9]$.
4) $y(1)=3\dfrac{1}{3}$; $y(9)=10$.
Следовательно, $\max\limits_{[1;9]} y(x)=y(9)=10$.
Ответ: 10.

4.29.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$.
2) $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3$; $D(y')=[0;+\infty)$.
3) $y'=0$; $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3=0$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$. На отрезке $[1;9]$ имеется одна критическая точка функции $x=4$.
4) $y(1)=-1$; $y(9)=1$; $y(4)=-3$.
Следовательно, $\min\limits_{[1;9]} y(x)=y(4)=-3$.
Ответ: –3.

4.30.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=3x-2x^{\frac{3}{2}}$.
2) $y'=3-3x^{\frac{1}{2}}$; $D(y')=[0;+\infty)$.
3) $y'=0$; $3-3x^{\frac{1}{2}}=0$; $\sqrt{x}=1$; $x=1$. На отрезке $[0;4]$ имеется одна критическая точка функции $x=1$.
4) $y(0)=0$; $y(4)=-4$; $y(1)=1$.
Следовательно, $\max\limits_{[0;4]} y(x)=y(1)=1$.
Ответ: 1.

4.31.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+1$.

2) $y'=x^{\frac{1}{2}}-3$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $x^{\frac{1}{2}}-3=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$. Точка 9 совпадает с концом отрезка $[1;9]$.

4) $y(1)=-1\frac{1}{3}$; $y(9)=-8$.

Следовательно, $\min\limits_{[1;9]} y(x)=y(9)=-8$.

Ответ: –8.

4.32.1. *Решение.* 1) $D(y)=[0;+\infty)$. Запишем функцию в виде $y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$.

2) $y'=-x^{\frac{1}{2}}+3$; $D(y')=[0;+\infty)$.

3) $y'=0$; $-x^{\frac{1}{2}}+3=0$; $\sqrt{x}=3$; $x=9$. Точка 9 совпадает с концом отрезка $[1;9]$.

4) $y(1)=3\frac{1}{3}$; $y(9)=10$.

Следовательно, $\max\limits_{[1;9]} y(x)=y(9)=10$.

Ответ: 10.

Функции, содержащие показательные выражения

4.33.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{9-x}(x-9)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{9-x}(x-9)=0$; $x=9$. На отрезке $[3;10]$ имеется одна критическая точка функции $x=9$.

4) $y'<0$ в промежутке $[3;9)$, $y'>0$ в промежутке $(9;10]$.

При переходе через критическую точку $x=9$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=9$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[3;10]$ достигается при $x=9$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[3;10]} y(x)=y(9)=-1.$$

Ответ: –1.

4.34.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-7}(7-x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-7}(7-x)=0$; $x=7$. На отрезке $[3;10]$ имеется одна критическая точка функции $x=7$.

4) $y'>0$ в промежутке $[3;7)$, $y'<0$ в промежутке $(7;10]$.

При переходе через критическую точку $x=7$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=7$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[3;10]$ достигается при $x=7$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[3;10]} y(x)=y(7)=1.$$

Ответ: 1.

4.35.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-7}(x-7)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-7}(x-7)=0$; $x=7$. На отрезке $[6;8]$ имеется одна критическая точка функции $x=7$.

4) $y'<0$ в промежутке $[6;7)$, $y'>0$ в промежутке $(7;8]$.

При переходе через критическую точку $x=7$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=7$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[6;8]$ достигается при $x=7$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[6;8]} y(x)=y(7)=-1.$$

Ответ: –1.

4.36.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{10-x}(10-x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{10-x}(10-x)=0$; $x=10$. На отрезке $[-11;11]$ имеется одна критическая точка функции $x=10$.

4) $y'>0$ в промежутке $[-11;10)$, $y'<0$ в промежутке $(10;11]$.

При переходе через критическую точку $x=10$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=10$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[-11;11]$ достигается при $x=10$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-11;11]} y(x)=y(10)=1.$$

Ответ: 1.

4.37.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-2}(x^2-2x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-2}(x^2-2x)=0$; $x=0; x=2$. На отрезке $[1;4]$ имеется одна критическая точка функции $x=2$.

4) $y'<0$ в промежутке $[1;2)$, $y'>0$ в промежутке $(2;4]$.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[1;4]$ достигается при $x=2$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[1;4]} y(x)=y(2)=0.$$

Ответ: 0.

4.38.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x}(x^2-2x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x}(x^2-2x)=0$; $x=0; x=2$. На отрезке $[-5;1]$ имеется одна критическая точка функции $x=0$.

4) $y'>0$ в промежутке $[-5;0)$, $y'<0$ в промежутке $(0;1]$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[-5;1]$ достигается при $x=0$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-5;1]} y(x)=y(0)=4.$$

Ответ: 4.

4.39.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{-3-x}(-x^2-4x-3)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{-3-x}(-x^2-4x-3)=0$; $x=-3; x=-1$. На отрезке $[-5;-1]$ имеется одна критическая точка функции $x=-3$.

4) $y'<0$ в промежутке $[-5;-3)$, $y'>0$ в интервале $(-3;-1)$.

При переходе через критическую точку $x=-3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-3$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[-5;-1]$ достигается при $x=-3$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[-5;-1]} y(x)=y(-3)=0.$$

Ответ: 0.

4.40.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{-4-x}(-x^2-10x-24)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{-4-x}(-x^2-10x-24)=0$; $x=-6; x=-4$. Внутри отрезка $[-6;-1]$ имеется одна критическая точка функции $x=-4$.

4) $y'>0$ в интервале $(-6;-4)$, $y'<0$ в промежутке $(-4;-1]$.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[-6;-1]$ достигается при $x=-4$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-6;-1]} y(x)=y(-4)=4.$$

Ответ: 4.

4.41.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{x-10}(3x^2-30x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{x-10}(3x^2-30x)=0$; $x=0;\ x=10$. На отрезке $[8;11]$ имеется одна критическая точка функции $x=10$.

4) $y'<0$ в промежутке $[8;10)$, $y'>0$ в промежутке $(10;11]$.

При переходе через критическую точку $x=10$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=10$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[8;11]$ достигается при $x=10$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[8;11]} y(x) = y(10) = -24 .$$

Ответ: –24.

4.42.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^x(3x^2-30x)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^x(3x^2-30x)=0$; $x=0; x=10$. На отрезке $[-1;4]$ имеется одна критическая точка функции $x=0$.

4) $y'>0$ в промежутке $[-1;0)$, $y'<0$ в промежутке $(0;4]$.

При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=0$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[-1;4]$ достигается при $x=0$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-1;4]} y(x) = y(0) = 36 .$$

Ответ: 36.

4.43.1. *Решение.* $D(y)=R$.

2) $y'=e^{2-x}(-x^2+10x-16)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{2-x}(-x^2+10x-16)=0$; $x=2; x=8$. На отрезке $[1;7]$ имеется одна критическая точка функции $x=2$.

4) $y'<0$ в промежутке $[1;2)$, $y'>0$ в промежутке $(2;7]$.

При переходе через критическую точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=2$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[1;7]$ достигается при $x=2$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[1;7]} y(x) = y(2) = -4 .$$

Ответ: –4.

4.44.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=e^{10-x}(-x^2+12x-20)$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $e^{10-x}(-x^2+12x-20)=0$; $x=2; x=10$. Внутри отрезка $[5;11]$ имеется одна критическая точка функции $x=10$.

4) $y'>0$ в промежутке $[5;10)$, $y'<0$ в промежутке $(10;11]$.

При переходе через критическую точку $x=10$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=10$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[5;11]$ достигается при $x=10$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[5;11]} y(x) = y(10) = 10 .$$

Ответ: 10.

4.45.1. *Решение.*) $D(y)=R$.

2) $y'=2e^{2x}-6e^x$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $2e^{2x}-6e^x=0$; $e^x=3; x=\ln 3$.

На отрезке $[1;2]$ имеется одна критическая точка функции $x=\ln 3$, так как $e<3<e^2$, $\ln e<\ln 3<\ln e^2$.

4) $y'<0$ в промежутке $[1;\ln 3)$, $y'>0$ в промежутке $(\ln 3;2]$.

При переходе через критическую точку $x=\ln 3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\ln 3$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $[1;2]$ достигается при $x=\ln 3$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[1;2]} y(x) = y(\ln 3) = -6 .$$

Ответ: –6.

Функции, содержащие логарифмические выражения

4.46.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-3;+\infty)$.

2) $y'=3-\dfrac{3}{x+3}$; $y'=\dfrac{3x+6}{x+3}$.

$D(y')=(-3;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\frac{3x+6}{x+3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x+6=0,\\ x>-3.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2.$$

На отрезке $\left[-2{,}5;0\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=-2$.

4) $y'<0$ в промежутке $[-2{,}5;-2)$, $y'>0$ в промежутке $(-2;0]$.

При переходе через критическую точку $x=-2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-2$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[-2{,}5;0\right]$ может достигаться при $x=-2$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[-2,5;0]} y(x)=y(-2)=-6.$$

Ответ: –6.

4.47.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-5;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{5}{x+5}-5$; $y'=\dfrac{-5x-20}{x+5}$.

$D(y')=(-5;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{-5x-20}{x+5}=0,\\ x>-5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5x-20=0,\\ x>-5.\end{cases}\Leftrightarrow x=-4.$$

На отрезке $\left[-4{,}5;0\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=-4$.

4) $y'>0$ в промежутке $[-4{,}5;-4)$, $y'<0$ в промежутке $(-4;0]$.

При переходе через критическую точку $x=-4$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-4$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[-4{,}5;0\right]$ достигается при $x=-4$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-4,5;0]} y(x)=y(-4)=20.$$

Ответ: 20.

4.48.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-7;+\infty)$.

2) $y'=4-\dfrac{4}{x+7}$; $y'=\dfrac{4x+24}{x+7}$.

$D(y')=(-7;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{4x+24}{x+7}=0,\\ x>-7.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+24=0,\\ x>-7.\end{cases}\Leftrightarrow x=-6.$$

На отрезке $\left[-6{,}5;0\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=-6$.

4) $y'<0$ в промежутке $[-6{,}5;-6)$, $y'>0$ в промежутке $(-6;0]$.

При переходе через критическую точку $x=-6$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-6$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[-6{,}5;0\right]$ достигается при $x=-6$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{[-6,5;0]} y(x)=y(-6)=-18.$$

Ответ: –18.

4.49.1. *Решение.* 1) $D(y)=(-7;+\infty)$.

2) $y'=\dfrac{8}{x+7}-8$; $y'=\dfrac{-8x-48}{x+7}$.

$D(y')=(-7;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{-8x-48}{x+7}=0,\\ x>-7.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x-48=0,\\ x>-7.\end{cases}\Leftrightarrow x=-6.$$

На отрезке $\left[-6{,}5;0\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=-6$.

4) $y'>0$ в промежутке $[-6{,}5;-6)$, $y'<0$ в промежутке $(-6;0]$.

При переходе через критическую точку $x=-6$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-6$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $[-6,5;0]$ достигается при $x=-6$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{[-6,5;0]} y(x)=y(-6)=51.$$

Ответ: 51.

4.50.1. *Решение*. 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) $y'=9-\frac{1}{x}$; $y'=\frac{9x-1}{x}$.

$D(y')=(0;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\frac{9x-1}{x}=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x-1=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}.$$

На отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=\frac{1}{9}$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(0;\frac{1}{9}\right)$, $y'>0$ в интервале $\left(\frac{1}{9};+\infty\right)$.

При переходе через критическую точку $x=\frac{1}{9}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\frac{1}{9}$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$ достигается при $x=\frac{1}{9}$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{9}\right)=4.$$

Ответ: 4.

4.51.1. *Решение*. 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) $y'=\frac{1}{x}-11$; $y'=\frac{1-11x}{x}$.

$D(y')=(0;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\frac{1-11x}{x}=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-11x=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{11}.$$

На отрезке $\left[\frac{1}{22};\frac{5}{22}\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=\frac{1}{11}$.

4) $y'>0$ в интервале $\left(0;\frac{1}{11}\right)$, $y'<0$ в интервале $\left(\frac{1}{11};+\infty\right)$.

При переходе через критическую точку $x=\frac{1}{11}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=\frac{1}{11}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[\frac{1}{22};\frac{5}{22}\right]$ достигается при $x=\frac{1}{11}$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{\left[\frac{1}{22};\frac{5}{22}\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{11}\right)=8.$$

Ответ: 8.

4.52.1. *Решение*. 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) $y'=4x-5+\frac{1}{x}$; $y'=\frac{4x^2-5x+1}{x}$.

$D(y')=(0;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\frac{4x^2-5x+1}{x}=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-5x+1=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=\frac{1}{4}.\end{array}\right.$$

На отрезке $\left[\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=1$.

4) $y'<0$ в интервале $\left(\frac{1}{4};1\right)$, $y'>0$ в интервале $(1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=1$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right]$ достигается при $x=1$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\min_{\left[\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right]} y(x)=y(1)=-6.$$

Ответ: –6.

4.53.1. *Решение.* 1) $D(y)=(0;+\infty)$.

2) $y'=4x-13+\frac{9}{x}$; $y'=\frac{4x^2-13x+9}{x}$.

$D(y')=(0;+\infty)$.

3) $y'=0$. С учетом $D(y')$

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2-13x+9}{x}=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-13x+9=0,\\ x>0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=\dfrac{9}{4}.\end{array}\right.$$

На отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$ имеется одна критическая точка функции $x=1$.

4) $y'>0$ в интервале $(0;1)$, $y'<0$ в интервале $\left(1;\frac{9}{4}\right)$.

При переходе через критическую точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=1$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$ достигается при $x=1$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом

$$\max_{\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]} y(x)=y(1)=-3.$$

Ответ: –3.

Функции, содержащие тригонометрические выражения

4.54.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=13-9\cos x$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $13-9\cos x=0$. Уравнение $\cos x=\frac{13}{9}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=4>0$, то данная функция возрастает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\min_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x)=y(0)=9.$$

Ответ: 9.

4.55.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=15-3\cos x$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $15-3\cos x=0$. Уравнение $\cos x=5$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=12>0$, то данная функция возрастает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{2};0\right]} y(x)=y(0)=5.$$

Ответ: 5.

4.56.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=5\cos x-6$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $5\cos x-6=0$. Уравнение $\cos x=\frac{6}{5}$ не имеет корней. Функция не

имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=-1<0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x)=y(0)=3.$$

Ответ: 3.

4.57.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=7\cos x-8$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $7\cos x-8=0$. Уравнение $\cos x=\frac{8}{7}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=-1<0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\min_{\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]} y(x)=y(0)=9.$$

Ответ: 9.

4.58.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=-9\sin x+14$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $-9\sin x+14=0$. Уравнение $\sin x=\frac{14}{9}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=14>0$, то данная функция возрастает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\min_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} y(x)=y(0)=16.$$

Ответ: 16.

4.59.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=-4\sin x-20$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $-4\sin x-20=0$. Уравнение $\sin x=-5$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=-20<0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\max_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} y(x)=y(0)=11.$$

Ответ: 11.

4.60.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y'=-5\sin x-6$; $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $-5\sin x-6=0$. Уравнение $\sin x=-\frac{6}{5}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0)=-6<0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$ достигается при $x=0$. Таким образом

$$\min_{\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]} y(x)=y(0)=9.$$

Ответ: 9.

4.61.1. *Решение*. 1) $D(y)=R$.

2) $y' = -7\sin x + 16$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $-7\sin x + 16 = 0$. Уравнение $\sin x = \frac{16}{7}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0) = 16 > 0$, то данная функция возрастает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$ достигается при $x = 0$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]} y(x) = y(0) = 5.$$

Ответ: 5.

4.62.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = -6\sin x + \frac{24}{\pi}$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $-6\sin x + \frac{24}{\pi} = 0$. Уравнение $\sin x = \frac{4}{\pi}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0) = \frac{24}{\pi} > 0$, то данная функция возрастает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$ достигается при $x = -\frac{2\pi}{3}$. Таким образом

$$\min_{\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]} y(x) = y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -14.$$

Ответ: –14.

4.63.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = -2\sin x - \frac{18}{\pi}$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $-2\sin x - \frac{18}{\pi} = 0$. Уравнение $\sin x = -\frac{9}{\pi}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0) = -\frac{18}{\pi} < 0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$ достигается при $x = -\frac{2\pi}{3}$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]} y(x) = y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 15.$$

Ответ: 15.

4.64.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $10\cos x - \frac{36}{\pi} = 0$. Уравнение $\cos x = \frac{18}{5\pi}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0) = 10 - \frac{36}{\pi} < 0$, то данная функция убывает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\frac{5\pi}{6};0\right]$.

Значит, наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};0\right]$ достигается при $x = -\frac{5\pi}{6}$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{5\pi}{6};0\right]} y(x) = y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 32.$$

Ответ: 32.

4.65.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 5\cos x + \dfrac{24}{\pi}$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $5\cos x + \dfrac{24}{\pi} = 0$. Уравнение $\cos x = -\dfrac{24}{5\pi}$ не имеет корней. Функция не имеет критических точек, значит, производная имеет постоянный знак.

4) Так как $y'(0) = 5 + \dfrac{24}{\pi} > 0$, то данная функция возрастает на своей области определения и в частности на промежутке $\left[-\dfrac{5\pi}{6};0\right]$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{6};0\right]$ достигается при $x = -\dfrac{5\pi}{6}$. Таким образом

$$\min_{\left[-\frac{5\pi}{6};0\right]} y(x) = y\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -16{,}5.$$

Ответ: –16,5.

4.66.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 12\cos x - 6\sqrt{3}$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $12\cos x - 6\sqrt{3} = 0$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

На отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ данная функция имеет одну критическую точку $x = \dfrac{\pi}{6}$.

4) $y' > 0$ в промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y' < 0$ в промежутке $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

При переходе через критическую точку $x = \dfrac{\pi}{6}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x = \dfrac{\pi}{6}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x = \dfrac{\pi}{6}$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 12$.

Ответ: 12.

4.67.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = 5 - 5\sqrt{2}\cos x$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $5 - 5\sqrt{2}\cos x = 0$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

На отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ данная функция имеет одну критическую точку $x = \dfrac{\pi}{4}$.

4) $y' < 0$ в промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y' > 0$ в промежутке $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

При переходе через критическую точку $x = \dfrac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = \dfrac{\pi}{4}$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x = \dfrac{\pi}{4}$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$.

Ответ: –2.

4.68.1. *Решение*. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$. $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$; $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

На отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ данная функция имеет одну критическую точку $x=\frac{\pi}{3}$.

4) $y'>0$ в промежутке $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)$, $y'<0$ в промежутке $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=\frac{\pi}{3}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x=\frac{\pi}{3}$, так как это единственная точка экстремума (максимума) функции на данном отрезке. Таким образом $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=12$.

Ответ: 12.

4.69.1. *Решение.* 1) $D(y)=R$.

2) $y'=-5+5\sqrt{2}\sin x$. $D(y')=R$.

3) $y'=0$; $-5+5\sqrt{2}\sin x=0$; $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

На отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ данная функция имеет одну критическую точку $x=\frac{\pi}{4}$.

4) $y'<0$ в промежутке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$, $y'>0$ в промежутке $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\frac{\pi}{4}$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x=\frac{\pi}{4}$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке. Таким образом $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

Ответ: –2.

4.70.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=\frac{5}{\cos^2 x}-5$; $y'=\frac{5-5\cos^2 x}{\cos^2 x}$;

$$y'=\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=5\,\mathrm{tg}^2 x\geq 0.$$

$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $y'=0$. $5\mathrm{tg}^2 x=0$; $\mathrm{tg}\,x=0$; $x=\pi k,\ k\in Z$.

4) На интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ данная функция определена и ее производная положительна. Значит, функция возрастает на заданном отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ и наименьшее значение функции на этом отрезке достигается при $x=0$. Таким образом

$$\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y(x)=y(0)=6.$$

Ответ: 6.

4.71.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=\frac{3}{\cos^2 x}-3$; $y'=\frac{3-3\cos^2 x}{\cos^2 x}$;

$$y'=\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=3\,\mathrm{tg}^2 x\geq 0.$$

$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) На интервале $\left(-\frac{\pi}{4};0\right)$ данная функция определена и ее производная положительна. Значит, функция возрастает на

заданном отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ и наибольшее значение функции на этом отрезке достигается при $x=0$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{4};0\right]} y(x)=y(0)=5.$$

Ответ: 5.

4.72.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=\frac{16}{\cos^2 x}-16$; $y'=\frac{16-16\cos^2 x}{\cos^2 x}$;

$$y'=\frac{16\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=16\mathrm{tg}^2 x\geq 0.$$

$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) На интервале $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ данная функция определена и ее производная неотрицательна. Значит, функция возрастает на заданном отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ и наибольшее значение функции на этом отрезке достигается при $x=\frac{\pi}{4}$. Таким образом

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=11.$$

Ответ: 11.

4.73.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=\frac{4}{\cos^2 x}-4$; $y'=\frac{4-4\cos^2 x}{\cos^2 x}$;

$$y'=\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=4\mathrm{tg}^2 x\geq 0.$$

$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) На интервале $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ данная функция определена и ее производная неотрицательна. Значит, функция возрастает на заданном отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ и наименьшее значение функции на этом отрезке достигается при $x=-\frac{\pi}{4}$. Таким образом

$$\min_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y(x)=y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Ответ: 1.

4.74.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=3-\frac{3}{\cos^2 x}$; $y'=\frac{3\cos^2 x-3}{\cos^2 x}$;

$$y'=-\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=-3\,\mathrm{tg}^2 x\leq 0.$$

$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $y'=0$. $-3\,\mathrm{tg}^2 x=0$; $\mathrm{tg}\,x=0$; $x=\pi k,\ k\in Z$.

4) На интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ данная функция определена и ее производная отрицательна. Значит, функция убывает на заданном отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ и наибольшее значение функции на этом отрезке достигается при $x=0$. Таким образом

$$\max_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y(x)=y(0)=-5.$$

Ответ: –5.

4.75.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=4-\frac{4}{\cos^2 x}$; $y'=\frac{4\cos^2 x-4}{\cos^2 x}$;

$$y'=-\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x};\ y'=-4\mathrm{tg}^2 x\leq 0.$$

$D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) На интервале $\left(-\frac{\pi}{4};0\right)$ данная функция определена и ее производная отрицательна. Значит, функция убывает на заданном отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ и наименьшее значение

функции на этом отрезке достигается при $x=0$. Таким образом

$$\min_{\left[-\frac{\pi}{4};0\right]} y(x)=y(0)=12.$$

Ответ: 12.

4.76.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=\frac{2}{\cos^2 x}-4$; $y'=\frac{2(1-2\cos^2 x)}{\cos^2 x}$;

$y'=-\frac{2\cos 2x}{\cos^2 x}$. $D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $y'=0$.

$$-\frac{2\cos 2x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\end{cases} n,k\in Z.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ и имеет две критические точки $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

4) $y'>0$ в промежутках $\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$; $y'<0$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-\frac{\pi}{4}$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\frac{\pi}{4}$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ может достигаться в одной из двух точек $x=-\frac{\pi}{3}$ или $x=\frac{\pi}{4}$.

Найдем значения данной функции в этих точках:

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}-3+\frac{7\pi}{3}>0$. $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Так как $y\left(\frac{\pi}{4}\right)<y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, то

$$\min_{\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Ответ: –1.

4.77.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=14-\frac{7}{\cos^2 x}$; $y'=\frac{7(2\cos^2 x-1)}{\cos^2 x}$;

$y'=\frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}$. $D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $y'=0$.

$$\frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\end{cases} n,k\in Z.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ и имеет две критические точки $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

4) $y'<0$ в промежутках $\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$; $y'>0$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-\frac{\pi}{4}$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=\frac{\pi}{4}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ может достигаться в одной из двух точек $x=-\frac{\pi}{3}$ или $x=\frac{\pi}{4}$.

Найдем значения данной функции в этих точках:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7\sqrt{3}+11-\frac{49\pi}{6}<0;\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=4.$$

Так как $y\left(\frac{\pi}{4}\right)>y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, то

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=4.$$

Ответ: 4.

4.78.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=4-\frac{2}{\cos^2 x}$; $y'=\frac{2(2\cos^2 x-1)}{\cos^2 x}$;

$y'=\frac{2\cos 2x}{\cos^2 x}$. $D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $y'=0$.

$$\frac{2\cos 2x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\end{cases} n,k\in Z.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ и имеет две критические точки $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

4) $y'<0$ в промежутках $\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$; $y'>0$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=-\frac{\pi}{4}$ – точка минимума.

При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=\frac{\pi}{4}$ – точка максимума.

Наибольшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ может достигаться в одной из двух точек $x=-\frac{\pi}{3}$ или $x=\frac{\pi}{4}$.

Найдем значения данной функции в этих точках:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}-3-\frac{7\pi}{3};\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-5.$$

Так как

$$2\sqrt{3}-3-\frac{7\pi}{3}<2\cdot 2-3-\frac{7\cdot 3}{3}=-6<-5,$$

то есть $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)<y\left(\frac{\pi}{4}\right)$, то

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-5.$$

Ответ: –5.

4.79.1. *Решение.*

1) $D(y): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $y'=\frac{7}{\cos^2 x}-14$; $y'=\frac{7(1-2\cos^2 x)}{\cos^2 x}$;

$y'=-\frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}$. $D(y'): x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $y'=0$.

$$-\frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\end{cases} n,k\in Z.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ и имеет две критические точки $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

4) $y'>0$ в промежутках $\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$; $y'<0$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

При переходе через критическую точку $x=-\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, $x=-\frac{\pi}{4}$ – точка максимума.

При переходе через критическую точку $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x=\frac{\pi}{4}$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ может достигаться в одной из двух точек $x=-\frac{\pi}{3}$ или $x=\frac{\pi}{4}$.

Найдем значения данной функции в этих точках:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-7\sqrt{3}+11+\frac{49\pi}{6};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=18.$$

Так как

$$-7\sqrt{3}+11+\frac{49\pi}{6}>-7\cdot 2+11+\frac{49\cdot 3}{6}=21{,}5>18,$$

то есть $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)>y\left(\frac{\pi}{4}\right)$, то

$$\min_{\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]} y(x)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=18.$$

Ответ: 18.

5. Первообразная функции

5.1.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=11x+5$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=\frac{11x^2}{2}+5x+C$. Так как по условию $F(0)=6$, то получаем уравнение $6=\frac{11\cdot 0^2}{2}+5\cdot 0+C$. Отсюда находим $C=6$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=\frac{11x^2}{2}+5x+6$. Найдем значение

$$F(-3)=\frac{11\cdot(-3)^2}{2}+5\cdot(-3)+6=40{,}5.$$

Ответ: 40,5.

5.2.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=3x^2-7x+1$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=x^3-\frac{7x^2}{2}+x+C$. Так как по условию $F(0)=4$, то получаем уравнение $4=0^3-\frac{7\cdot 0^2}{2}+0+C$. Отсюда находим $C=4$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=x^3-\frac{7x^2}{2}+x+4$. Найдем значение $F(4)=4^3-\frac{7\cdot 4^2}{2}+4+4=16$.

Ответ: 16.

5.3.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=5x^3-3x^2+7x-2$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=\frac{5x^4}{4}-x^3+\frac{7x^2}{2}-2x+C$. Так как по условию $F(0)=-5$, то получаем уравнение $-5=\frac{5\cdot 0^4}{4}-0^3+\frac{7\cdot 0^2}{2}-2\cdot 0+C$. Отсюда находим $C=-5$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=\frac{5x^4}{4}-x^3+\frac{7x^2}{2}-2x-5$. Найдем значение

$$F(2)=\frac{5\cdot 2^4}{4}-2^3+\frac{7\cdot 2^2}{2}-2\cdot 2-5=17.$$

Ответ: 17.

5.4.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=9x^8$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=x^9+C$. Так как по условию $F(0)=-13$, то получаем уравнение $-13=0^9+C$. Отсюда находим $C=-13$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=x^9-13$. Найдем значение $F(-1)=(-1)^9-13=-14$.

Ответ: –14.

5.5.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Для функции $f(x)=\frac{7}{x}$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=7\ln|x|+C$. Так как по условию $F(1)=-11$, то получаем уравнение $-11=7\ln 1+C$. Отсюда находим $C=-11$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=7\ln x-11$. Значение $F(e^2)=7\ln e^2-11=7\cdot 2-11=3$.

Ответ: 3.

5.6.1. *Решение.* Одна из первообразных для функции $f(x)=\frac{8}{4x+3}$ на промежутке $\left(-\frac{3}{4};\infty\right)$ имеет вид $F(x)=2\ln(4x+3)+C$. Так как по условию $F(0)=2\ln 3-5$, то получаем уравнение $2\ln 3-5=2\ln(4\cdot 0+3)+C$. Отсюда находим $C=-5$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=2\ln(4x+3)-5$. Найдем значение $F(-0,5)=2\ln(4\cdot(-0,5)+3)-5=-5$.

Ответ: –5.

5.7.1. *Решение.* На промежутке $(0;\infty)$ для функции $f(x)=6\sqrt{x}+5$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=4x\sqrt{x}+5x+C$. Так как по условию $F(1)=9$, то получаем уравнение $9=4\cdot 1\cdot\sqrt{1}+5\cdot 1+C$. Отсюда находим $C=0$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=4x\sqrt{x}+5x$. Найдем значение $F(4)=4\cdot 4\cdot\sqrt{4}+5\cdot 4=52$.

Ответ: 52.

5.8.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=6e^x$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=6e^x+C$. Так как по условию $F(0)=-18$, то получаем уравнение $-18=6e^0+C$. Отсюда находим $C=-24$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=6e^x-24$. Найдем значение $F(\ln 3)=6e^{\ln 3}-24=18-24=-6$.

Ответ: –6.

5.9.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=-5\sin x$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=5\cos x+C$. Так как по условию $F(0)=17$, то получаем уравнение $17=5\cos 0+C$. Отсюда находим $C=12$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=5\cos x+12$. Найдем значение

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\cos\frac{\pi}{3}+12=2,5+12=14,5.$$

Ответ: 14,5.

5.10.1. *Решение.* Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$. Для функции $f(x)=8\cos x$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=8\sin x+C$. Так как по условию $F(-\pi)=13$, то получаем уравнение $13=8\sin(-\pi)+C$. Отсюда находим $C=13$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=8\sin x+13$. Найдем значение

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=8\sin\frac{\pi}{6}+13=4+13=17$.

Ответ: 17.

5.11.1. *Решение.* 1) Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$.

2) По определению первообразной $F'(x)=f(x)=x^2-3x-4$.

3) Решая уравнение $F'(x)=0$ или $x^2-3x-4=0$, находим критическую точку $x=4$ функции $F(x)$ на отрезке $[0;8]$.

4) $F'(x)<0$ на промежутке $(0;4)$, $F'(x)>0$ на промежутке $(4;8)$.

При переходе через критическую точку $x=4$ производная $F'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции $F(x)$ в этой точке, получаем, что $x=6$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции $F(x)$ на отрезке $[0;8]$ достигается в точке $x=4$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке.

Ответ: 4.

5.12.1. *Решение.* 1) Функция $f(x)$ определена при всех значениях $x\in R$.

2) По определению первообразной $F'(x)=f(x)=x^2-2x-3$.

3) Решая уравнение $F'(x)=0$ или $x^2-2x-3=0$, находим критическую точку $x=3$ функции $F(x)$ на отрезке $[0;6]$.

4) $F'(x)<0$ на промежутке $(0;3)$, $F'(x)>0$ на промежутке $(3;6)$.

При переходе через критическую точку $x=3$ производная $F'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Значит, в силу непрерывности функции $F(x)$ в этой точке, получаем, что $x=3$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции $F(x)$ на отрезке $[0;6]$ достигается в точке $x=3$, так как это единственная точка экстремума (минимума) функции на данном отрезке.

5) Для функции $f(x)=x^2-2x-3$ одна из первообразных имеет вид $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+C$. Так как по условию $F(3)=-9$, то получаем уравнение $-9=\frac{3^3}{3}-3^2-3\cdot3+C$. Отсюда находим $C=0$. Значит, искомая первообразная, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$.

6) Наибольшее значение первообразной может достигаться на левом или правом конце отрезка, т.е. при $x=0$ или при $x=6$. Найдем значения первообразной в этих точках: $F(0)=\frac{0^3}{3}-0^2-3\cdot0=0$, $F(6)=\frac{6^3}{3}-6^2-3\cdot6=18$.

Наибольшее из этих значений равно 18.

Ответ: 18.

Ответы

1. Исследование функции без производной Точки экстремума функции

***

1.1.1. –2. **1.1.2.** –9. **1.1.3.** 6.

***

1.2.1. 3. **1.2.2.** –10. **1.2.3.** 14.

***

1.3.1. 1. **1.3.2.** –7. **1.3.3.** 6.

***

1.4.1. 3. **1.4.2.** –12. **1.4.3.** 15.

***

1.5.1. 3. **1.5.2.** –4. **1.5.3.** –10.

***

1.6.1. –1. **1.6.2.** 4. **1.6.3.** –7.

2. Исследование функции без производной Наибольшее и наименьшее значения функции

***

2.1.1. 2. **2.1.2.** 13. **2.1.3.** 2.

***

2.2.1. 3. **2.2.2.** 17. **2.2.3.** 10.

***

2.3.1. 2. **2.3.2.** 13. **2.3.3.** 1.

***

2.4.1. 4. **2.4.2.** 0. **2.4.3.** 15.

***

2.5.1. 16. **2.5.2.** 625. **2.5.3.** 243.

***

2.6.1. 9. **2.6.2.** 81. **2.6.3.** 4.

3. Исследование функции с помощью производной Точки экстремума функции

<u>Целые рациональные функции</u>

***

3.1.1. –4. **3.1.2.** –8. **3.1.3.** –9.

***

3.2.1. 4. **3.2.2.** 9. **3.2.3.** 8.

***

3.3.1. 2. **3.3.2.** 10. **3.3.3.** 7.

***

3.4.1. –2. **3.4.2.** –5. **3.4.3.** –10.

***

3.5.1. 0. **3.5.2.** –10. **3.5.3.** 0.

***

3.6.1. 2. **3.6.2.** 0. **3.6.3.** 14.

***

3.7.1. –1. **3.7.2.** –10. **3.7.3.** 2.

***

3.8.1. 1. **3.8.2.** 2. **3.8.3.** –2.

***

3.9.1. 1. **3.9.2.** –6. **3.9.3.** –10.

***

3.10.1. –1. **3.10.2.** 9. **3.10.3.** 6.

***

3.11.1. 6. **3.11.2.** 0. **3.11.3.** 11.

***

3.12.1. 0. **3.12.2.** 0. **3.12.3.** –10.

***

3.13.1. –3. **3.13.2.** –6. **3.13.3.** –1.

***

3.14.1. 3. **3.14.2.** 4. **3.14.3.** 5.

***

3.15.1. 3. **3.15.2.** 7. **3.15.3.** 5.

***

3.16.1. –3. **3.16.2.** –10. **3.16.3.** –1.

***

3.17.1. 2. **3.17.2.** –1. **3.17.3.** –9.

***

3.18.1. –3. **3.18.2.** 8. **3.18.3.** 7.

<u>Дробные рациональные функции</u>

***

3.19.1. –4. **3.19.2.** –7. **3.19.3.** –18.

***

3.20.1. 5. **3.20.2.** 29. **3.20.3.** 19.

***

3.21.1. –17. **3.21.2.** –12. **3.21.3.** –27.

***

3.22.1. 1. **3.22.2.** 26. **3.22.3.** 8.

***

3.23.1. 17. **3.23.2.** 11. **3.23.3.** 18.

***

3.24.1. –1. **3.24.2.** –6. **3.24.3.** –26.

Функции, содержащие степенные и иррациональные выражения

***

3.25.1. 4. **3.25.2.** 16. **3.25.3.** 196.

***

3.26.1. 4. **3.26.2.** 1. **3.26.3.** 16.

***

3.27.1. 4. **3.27.2.** 2,25. **3.27.3.** 256.

***

3.28.1. 9. **3.28.2.** 484. **3.28.3.** 6,25.

***

3.29.1. 4. **3.29.2.** 64. **3.29.3.** 100.

***

3.30.1. 9. **3.30.2.** 400. **3.30.3.** 12,25.

***

3.31.1. 4. **3.31.2.** 100. **3.31.3.** 400.

***

3.32.1. 4. **3.32.2.** 2,25. **3.32.3.** 100.

Функции, содержащие показательные выражения

***

3.33.1. –17. **3.33.2.** –19. **3.33.3.** –55.

***

3.34.1. 8. **3.34.2.** 10. **3.34.3.** 59.

***

3.35.1. 4. **3.35.2.** 17. **3.35.3.** 74.

***

3.36.1. –15. **3.36.2.** –16. **3.36.3.** –38.

***

3.37.1. 10. **3.37.2.** 3. **3.37.3.** 5.

***

3.38.1. 0. **3.38.2.** 0. **3.38.3.** 0.

***

3.39.1. 2. **3.39.2.** 2. **3.39.3.** 2.

***

3.40.1. 10. **3.40.2.** 5. **3.40.3.** 8.

***

3.41.1. 0. **3.41.2.** 5. **3.41.3.** –15.

***

3.42.1. 2. **3.42.2.** 7. **3.42.3.** –14.

***

3.43.1. –4. **3.43.2.** –3. **3.43.3.** 9.

***

3.44.2. –3. **3.44.2.** –8. **3.44.3.** 13.

Функции, содержащие логарифмические выражения

***

3.45.1. –2,5. **3.45.2.** –10,75. **3.45.3.** –8,9.

***

3.46.1. –4,5. **3.46.2.** 11,2. **3.46.3.** 7,5.

***

3.47.1. –6. **3.47.2.** –8. **3.47.3.** –4.

***

3.48.1. –6. **3.48.2.** –5. **3.48.3.** –3.

***

3.49.1. –2. **3.49.2.** –7. **3.49.3.** –3.

***

3.50.1. –4. **3.50.2.** –23. **3.50.3.** –8.

***

3.51.1. 1. **3.51.2.** 9. **3.51.3.** 9.

***

3.52.1. 1. **3.52.2.** 3. **3.52.3.** 4.

Функции, содержащие тригонометрические выражения

***

3.53.1. 1,5. **3.53.2.** 1,5. **3.53.3.** 0,5.

***

3.54.1. 0,5. **3.54.2.** 1,5. **3.54.3.** 1,5.

4. Исследование функции с помощью производной Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Целые рациональные функции

***

4.1.1. –54. **4.1.2.** 21. **4.1.3.** –667.

***

4.2.1. 6. **4.2.2.** 697. **4.2.3.** 151.

***

4.3.1. –2. **4.3.2.** 15. **4.3.3.** –2897.

***

4.4.1. 0. **4.4.2.** 127. **4.4.3.** 881.

***

4.5.1. 3. **4.5.2.** –64. **4.5.3.** 56.

***

4.6.1. 3. **4.6.2.** 14. **4.6.3.** 113.

***

4.7.1. –109. **4.7.2.** –28. **4.7.3.** –8.

***

4.8.1. 12. **4.8.2.** 16. **4.8.3.** 900.

***

4.9.1. –9. **4.9.2.** –239. **4.9.3.** –1465.

***

4.10.1. 23. **4.10.2.** 139. **4.10.3.** 413.

***

4.11.1. 0. **4.11.2.** 5. **4.11.3.** –607,5.

***

4.12.1. 108. **4.12.2.** 93. **4.12.3.** 1115,5.

***

4.13.1. –25. **4.13.2.** –482. **4.13.3.** –137.

***

4.14.1. 11. **4.14.2.** 145. **4.14.3.** 478.

***

4.15.1. –13. **4.15.2.** –154. **4.15.3.** –481.

***

4.16.1. 23. **4.16.2.** 491. **4.16.3.** 141.

***

4.17.1. –1. **4.17.2.** –3. **4.17.3.** –5.

***

4.18.1. 5. **4.18.2.** 0. **4.18.3.** –6.

***

4.19.1. 48. **4.19.2.** 128. **4.19.3.** 368.

***

4.20.1. 10. **4.20.2.** 46. **4.20.3.** 14.

<u>Дробные рациональные функции</u>

***

4.21.1. –6. **4.21.2.** 10. **4.21.3.** –39.

***

4.22.1. 12. **4.22.2.** 62. **4.22.3.** 64.

***

4.23.1. 10. **4.23.2.** 20. **4.23.3.** 32.

***

4.24.1. –10. **4.24.2.** –54. **4.24.3.** –52.

<u>Функции, содержащие степенные и иррациональные выражения</u>

***

4.25.1. –3. **4.25.2.** –89. **4.25.3.** –24.

***

4.26.1. 1. **4.26.2.** 1340. **4.26.3.** 1011.

***

4.27.1. –8. **4.27.2.** –12. **4.27.3.** –38,75.

***

4.28.1. 10. **4.28.2.** 157. **4.28.3.** 295.

***

4.29.1. –3. **4.29.2.** –3982. **4.29.3.** –849.

***

4.30.1. 1. **4.30.2.** 139. **4.30.3.** 40,25.

***

4.31.1. –8. **4.31.2.** 68,75. **4.31.3.** –2221.

***

4.32.1. 10. **4.32.2.** 988. **4.32.3.** 27.

<u>Функции, содержащие показательные выражения</u>

***

4.33.1. –1. **4.33.2.** –1. **4.33.3.** –1.

***

4.34.1. 1. **4.34.2.** 1. **4.34.3.** 1.

***

4.35.1. –1. **4.35.2.** –1. **4.35.3.** –1.

***

4.36.1. 1. **4.36.2.** 1. **4.36.3.** 1.

***

4.37.1. 0. **4.37.2.** 0. **4.37.3.** 0.

***

4.38.1. 4. **4.38.2.** 4. **4.38.3.** 4.

***

4.39.1. 0. **4.39.2.** 0. **4.39.3.** 0.

***

4.40.1. 4. **4.40.2.** 4. **4.40.3.** 4.

***

4.41.1. –24. **4.41.2.** –14. **4.41.3.** –15.

***

4.42.1. 36. **4.42.2.** 1724. **4.42.3.** 14.

***

4.43.1. –4. **4.43.2.** –21. **4.43.3.** –25.

***

4.44.1. 10. **4.44.2.** 50. **4.44.3.** 21.

***

4.45.1. –6. **4.45.2.** 2. **4.45.3.** 8.

<u>Функции, содержащие логарифмические выражения</u>

***

4.46.1. –6. **4.46.2.** –20. **4.46.3.** –70.

***

4.47.1. 20. **4.47.2.** 27. **4.47.3.** 120.

***

4.48.1. –18. **4.48.2.** –6. **4.48.3.** –239.

***

4.49.1. 51. **4.49.2.** 35. **4.49.3.** 253.

***

4.50.1. 4. **4.50.2.** 7. **4.50.3.** 18.

***

4.51.1. 8. **4.51.2.** 10. **4.51.3.** 8.

***

4.52.1. –6. **4.52.2.** 4. **4.52.3.** –17.

***

4.53.1. –3. **4.53.2.** –18. **4.53.3.** –18.

Функции, содержащие тригонометрические выражения

***

4.54.1. 9. **4.54.2.** 6. **4.54.3.** –19.

***

4.55.1. 5. **4.55.2.** 3. **4.55.3.** 25.

***

4.56.1. 3. **4.56.2.** 25. **4.56.3.** 2.

***

4.57.1. 9. **4.57.2.** 6. **4.57.3.** 22.

***

4.58.1. 16. **4.58.2.** 13. **4.58.3.** 83.

***

4.59.1. 11. **4.59.2.** 53. **4.59.3.** 36.

***

4.60.1. 9. **4.60.2.** 20. **4.60.3.** 107.

***

4.61.1. 5. **4.61.2.** 5. **4.61.3.** –3.

***

4.62.1. –14. **4.62.2.** –10. **4.62.3.** –4,5.

***

4.63.1. 15. **4.63.2.** 23. **4.63.3.** 101.

***

4.64.1. 32. **4.64.2.** 32. **4.64.3.** 55.

***

4.65.1. –16,5. **4.65.2.** –23. **4.65.3.** –41.

***

4.66.1. 12. **4.66.2.** 37. **4.66.3.** 64.

***

4.67.1. –2. **4.67.2.** –47. **4.67.3.** –25.

***

4.68.1. 12. **4.68.2.** 21. **4.68.3.** 16.

***

4.69.1. –2. **4.69.2.** 0. **4.69.3.** –33,5.

***

4.70.1. 6. **4.70.2.** 7. **4.70.3.** 44.

***

4.71.1. 5. **4.71.2.** 9. **4.71.3.** 23.

***

4.72.1. 11. **4.72.2.** 15. **4.72.3.** 17.

***

4.73.1. 1. **4.73.2.** –29. **4.73.3.** 1.

***

4.74.1. –5. **4.74.2.** –7. **4.74.3.** –38.

***

4.75.1. 12. **4.75.2.** 17. **4.75.3.** 35.

***

4.76.1. –1. **4.76.2.** 3. **4.76.3.** 73.

***

4.77.1. 4. **4.77.2.** 12. **4.77.3.** –59.

***

4.78.1. –5. **4.78.2.** 11. **4.78.3.** –10.

***

4.79.1. 18. **4.79.2.** 18. **4.79.3.** 16.

5. Первообразная функции

***

5.1.1. 40,5. **5.1.2.** –5. **5.1.3.** –0,7.

***

5.2.1. 16. **5.2.2.** 41,5. **5.2.3.** –241.

***

5.3.1. 17. **5.3.2.** 42. **5.3.3.** –67,25.

***

5.4.1. –14. **5.4.2.** –98,2. **5.4.3.** –1.

***

5.5.1. 3. **5.5.2.** –22. **5.5.3.** –2.

***

5.6.1. –5. **5.6.2.** 7,5. **5.6.3.** –16.

***

5.7.1. 52. **5.7.2.** 6. **5.7.3.** 14.

***

5.8.1. –6. **5.8.2.** –45. **5.8.3.** –2,6.

***

5.9.1. 14,5. **5.9.2.** –25,5. **5.9.3.** –15.

***

5.10.1. 17. **5.10.2.** –19. **5.10.3.** –1.

***

5.11.1. 4. **5.11.2.** 1. **5.11.3.** 7.

***

5.12.1. 18. **5.12.2.** –4. **5.12.3.** 154.

6. Дополнительные задачи

1. 4) $[-3;1]$. **2. а)** $x_{\min}=3$; $y_{\min}=4$. **б)** $x_{\min}=0$; $y_{\min}=-4$. **в)** $x_{\min}=1{,}5$; $y_{\min}=2{,}5$. **г)** $x_{\max}=0$; $y_{\max}=8$. **д)** $x_{\max}=1{,}5$; $y_{\max}=-5{,}75$. **е)** $x_{\min}=0$; $y_{\min}=-2$. **ж)** $x_{\min}=3$; $y_{\min}=4$.

з) $x_{\max} = -2$; $y_{\max} = 5$. **3.** 3,5. **4.** –13.
5. –1,2. **6. а)** 11; **б)** 13. **7. а)** –4; **б)** 4. **8.** 2,5.
9. 8. **10. а)** 2,6; **б)** 3,5. **11.** –1. **12.** 8.
13. 1250. **14.** 2. **15.** –50. **16.** 21. **17.** –10.

Список и источники литературы

1. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2007.

2. ЕГЭ-20014. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко – М.: Издательство «Национальное образование», 2013. – 192 с. – (ЕГЭ-2014. ФИПИ – школе).

3. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие /Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990. – 608 с.

4. Семенов А. В. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2014. Математика. Учебное пособие. / А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Ященко, П. И. Захаров; под ред. И. В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект-Центр, 2014. – 96 с.

5. Шестаков С. А. ЕГЭ 2014. Математика. Задача В14. Производная и первообразная. Исследование функций. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – 5-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014. – 112 с.

6. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2014 (открытый банк заданий).

7. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

8. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.

9. http://reshuege.ru – Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».