

Занятие 20. Комбинаторика и делимость

- Докажите, что
 - произведение 3 последовательных чисел делится на 6;
 - произведение 4 последовательных чисел делится на 24;
 - произведение n последовательных чисел делится на $n!$
- Докажите, что
 - число способов разрезать квадрат на домино делится на 2.
 - число способов разрезать куб на прямоугольные параллелепипеды $1 \times 1 \times 2$ делится на 3.

Малая теорема Ферма

3. Пусть p – простое. Докажите, что

- если $1 \leq k \leq p-1$, то $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$;
- $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$;
- $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p \equiv_p a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$;
- (малая теорема Ферма) $(n^p - n) \equiv 0 \pmod{p}$ при любом целом n .

4. Ожерелья и теорема Ферма

Есть бусинки k разных цветов. Зафиксируем простое число p . Будем насаживать бусинки на (направленные) нитки и создавать всевозможные (незамкнутые) нитки из p бусинок, и (замкнутые круглые) ожерелья из p бусинок.

- Сколько всего есть различных ниток?
- Покажите, что если в ожерелье не все бусинки одного цвета, то разные способы его разрезания дадут разные нитки.
- Найдите общее число неоднородных ожерелий.
- Докажите что $k^p - k$ делится на p .

5. Докажите, что

- $n \binom{2n}{n}$ делится на $n+1$
- Число Каталана $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ – целое.

Определение. Будем рассматривать строки из $2n$ скобок, где открывающих и закрывающих скобок поровну. Назовем такую строку **правильной структурой**, если при любом зачеркивании нескольких последних скобок открывающих скобок останется не меньше, чем закрывающих. R_n – число правильных структур.

6. Докажите, что $R_{n+1} = R_0 R_n + R_1 R_{n-1} + R_2 R_{n-2} + \dots + R_n R_0$

7. а) Докажите, что неправильных структур $\binom{2n}{n+1}$

б) Докажите, что $R_n = C_n$

Задачи для долгоиграющего матча.

М34. Выпуклый четырехугольник можно 2 способами разбить непересекающимися диагоналями на треугольники, а пятиугольник – 5 способами. А сколькими способами можно разбить выпуклый n -угольник?

М35. Докажите, что $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ целое.