Бинарные отношения и их свойства.
Систематизация свойств.

Каждое бинарное (двухместное) отношение характеризуется свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Полное или частичное отсутствие этих свойств в отношении отражается в их наименовании приставками соответственно "анти" и "не". Определённым сочетаниям этих базовых свойств даны свои специальные наименования; например, антисимметричное и антирефлексивное отношение называется асимметричным.

Свойство **рефлексивности** рассматривается для **одного** элемента множества.

Отношение называется **рефлексивным**, если для любого предмета из области его определения имеет место это отношение предмета к самому себе. Отношение *ровесник*, определенное на области пар людей, рефлексивно, потому что любой человек ровесник самого себя.

Если отношение имеет место не для любой такой пары, то оно называется **нерефлексивным**. Нерефлексивно отношение *любит*, определенное на области пар людей, так как не все люди любят себя.

Если отношение не имеет места ни для одной такой пары, то отношение называется **антирефлексивным**. Отношение *больше*, определённое на области пар материальных предметов, антирефлексивно, поскольку ни один предмет не больше самого себя.

Свойство **симметричности** рассматривается для **двух разных** элементов множества.

Отношение называется **симметричным**, когда для любых пар предметов из области его определения верно, что, когда это отношение x и y, то оно имеет место и в паре (y, x). Отношение *ровесник* симметрично, так как для любых двух людей верно, что, если первый ровесник второго, то и второй ровесник первого.

Отношение называется **несимметричным**, если оно верно не для любых двух предметов из области определения. Несимметрично отношение *любит*, поскольку не для любых двух людей верно, что если первый любит второго, то второй любит первого.

Отношение называется **антисимметричным**, если в области определения отношения не существует пар указанного вида, для которых это верно. Отношение *больше* антисимметрично, потому что ни для каких предметов не может быть так, что первый предмет больше второго, а второй больше первого.

Свойство **транзитивности** рассматривается для **трёх разных** элементов множества.

Отношение называется **транзитивным**, если оно обязательно имеет место для пары (x, z) при условии его наличия в парах (x, y) и (y, z). Отношение *ровесник* транзитивно, так как для любых трёх людей, если один человек ровесник другого, а тот ровесник третьего, первый непременно является ровесником третьего.

Отношение называется **нетранзитивным**, если это верно не для любых предметов из области определения отношения. Нетранзитивно отношение *любит*, потому что неверно, что оно имеет место в паре (x, z) всегда, когда оно наличествует в парах (x, y) и (y, z), т. е. не обязательно, чтобы первый человек любил третьего, когда первый любит второго, а второй любит третьего.

Отношение называется **антитранзитивным**, если в области определения отношения не существует таких предметов, для которых это было бы верно. Антитранзитивно отношение *отец*, потому что не найдется таких трёх пар указанного вида, чтобы это отношение имело место во всех трёх. Никогда не может быть так, что первый человек - отец второго, второй - отец третьего, и при этом первый - отец третьего.

Определения.

Определение. **Бинарным отношением** ρ называется двухместное отношение между любыми двумя множествами A и B, т.е. всякое подмножество декартова произведения этих множеств:

$$\rho \subseteq A \times B.$$

Бинарное отношение на множестве A:

$$\rho \subseteq A \times A = A^2.$$

Определение. Множество всех первых элементов пар $\rho \subseteq A \times B$ называется **областью определения отношения** ρ и обозначается $\mathrm{Dom}\,\rho$:

$$\mathrm{Dom}\,\rho = \{x \mid \exists y (x, y) \in \rho\}.$$

Определение. Множество всех вторых элементов пар $\rho \subseteq A \times B$ называется **областью значения отношения** ρ и обозначается $\mathrm{Im}\,\rho$:

$$\mathrm{Im}\,\rho = \{y \mid \exists x (x, y) \in \rho\}.$$

Определение. Бинарное отношение ρ называют **полным** отношением, если для каждой пары x, y несовпадающих элементов множества A выполняется $x\rho y$ или $y\rho x$.

Определение. Бинарное отношение ρ называется **линейным**, если

$$\forall x, y \in A: \quad (x = y \vee x\rho y \vee y\rho x).$$

Определение. **Инверсия** (обратное отношение) ρ:

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \rho\}.$$

Определение. **Композиция** (суперпозиция) бинарных отношений ρ и δ:

$$\rho \circ \delta = \{(x, y) \mid \exists z (x\rho z \wedge z\delta y)\}.$$

Определение. Отношение ρ называется **рефлексивным**, если каждый элемент $x \in A$ находится в этом отношении сам с собой: $x\rho x$ для всех $x \in A$:

$$\forall x: \quad x \in A: \quad x\,\rho\,x.$$

Определение. Отношение ρ называется **симметричным**, если из того, что $x\rho y$, следует, что $y\rho x$:

$$\forall x, y \in A: \quad x\,\rho\,y \Rightarrow y\,\rho\,x.$$

Определение. Отношение ρ называется **транзитивным**, если из того, что $x\rho y$ и $y\rho z$, следует, что $x\rho z$:

$$\forall x, y, z \in A: \quad (x\rho y \wedge y\rho z) \quad \Rightarrow \quad x\,\rho\,z$$

Определение. Отношение ρ называется **нерефлексивным**, если

$$\neg\forall x \in A: \quad x\,\rho\,x.$$

Определение. Отношение ρ называется **несимметричным**, если

$$\neg\forall x, y \in A: \quad x\,\rho\,y \Rightarrow y\,\rho\,x.$$

Определение. Отношение ρ называется **нетранзитивным**, если

$$\neg\forall x, y, z \in A: \quad (x\rho y \wedge y\rho z) \quad \Rightarrow \quad x\,\rho\,z.$$

Определение. Отношение ρ называется **антирефлексивным** (иррефлексивным), если

$$\forall x \in A:\ \neg(x\rho x).$$

Определение. Отношение ρ называется **антисимметричным**, если выполнение отношений $x\rho y$ и $y\rho x$ возможно только для равных x и y:

$$\forall x, y \in A:\ (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y,$$

или эквивалентное определение

$$\forall x, y \in A:\ (x \neq y \wedge x\rho y) \Rightarrow \neg(y\rho x).$$

Определение. Отношение ρ называется **антитранзитивным**, если

$$\forall x, y, z \in A:\ (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow \neg(x\rho z).$$

Определение. Отношение ρ называется **асимметричным**, если одновременное выполнение отношений $x\rho y$ и $y\rho x$ невозможно (отношение антисимметрично и антирефлексивно):

$$\forall x, y \in A:\ x\rho y \Rightarrow \neg(y\rho x).$$

Определение. Бинарное отношение называют **эквивалентностью** (отношением эквивалентности), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Литература:

1) Белоусов А.И., Ткачёв С.Б. "Дискретная математика", 2006, стр. 62 (рефлексивное, нерефлексивное, иррефлексивное отношения);
2) Кузина Е.Б. "Логика: сто вопросов - сто ответов", 2004, страница 111 (свойства двухместных отношений);
3) Турецкий В.Я. "Математика и информатика", 2005, стр. 35;
4) Важенин Ю.М. "Множества, логика, алгоритмы", 1997 (изд. УрГУ);
5) Новиков Ф.А. "Дискретная математика для программистов", 2008, стр. 53.

1) Проверить, является ли отношением эквивалентности на множестве всех прямых на плоскости отношение "перпендикулярных прямых".

Определение. Бинарное отношение на некотором множестве называют эквивалентностью (отношением эквивалентности), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Поскольку никакая прямая из множества всех прямых на плоскости не перпендикулярна сама себе ($a \not\perp a$), то данное отношение не является рефлексивным.

Данное отношение является симметричным, поскольку для любых прямых a и b:

$$a \perp b \Rightarrow b \perp a.$$

Данное отношение не является транзитивным, т.к. для любых прямых a, b и c:

$$\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases} \not\Rightarrow a \perp c.$$

Итак, данное бинарное отношение не является отношением эквивалентности (не выполнено условие рефлексивности и транзитивности).

2) На множестве натуральных чисел задано бинарное отношение g :

$$agb \Leftrightarrow a = b + 1.$$

Обладает ли данное отношение свойством рефлективности ?

Поскольку утверждение $\forall x: \ x \in N: \ x = x + 1$ не является истинным, то данное бинарное отношение не обладает свойством рефлексивности. Например: $2 = 2 + 1$ - неверно.

Ответ: нет.

3) На множестве натуральных чисел задано бинарное отношение g :

$$agb \Leftrightarrow \begin{cases} a \vdots 5 \\ b \vdots 5 \end{cases}$$

Обладает ли данное отношение свойством симметричности ?

Обозначение. "делится на" ≡ "$\vdots$".

Поскольку из того, что если x делится на 5 и y делится на 5, следует, что y делится на 5 и x делится на 5, то данное бинарное отношение обладает свойством симметричности.

Ответ: да.

4) На множестве натуральных чисел задано бинарное отношение g :

$$agb \Leftrightarrow a \vdots b.$$

Обладает ли данное отношение свойством транзитивности ?

Поскольку

$$x \vdots y \Rightarrow x = m \cdot y, \ m \in N$$

$$y \vdots z \Rightarrow y = n \cdot z, \ n \in N$$

то

$$x = m \cdot y = m \cdot (n \cdot z) = (m \cdot n) \cdot z, \ (m \cdot n) \in N$$

$$\Downarrow$$

$$x \vdots z$$

Итак,

$$\forall x, y, z: \ x \in N, y \in N, z \in N: \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots z \end{cases} \Rightarrow \quad x \vdots z,$$

следовательно, данное бинарное отношение ("делится на" ≡ "$\vdots$") обладает свойством транзитивности.

Ответ: да.

5) Исследовать отношение ρ на множестве $X=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$:

$x\rho y$, если $xy>0$.

Построить график бинарного отношения.

Отношение ρ называется **рефлексивным**, если каждый элемент $x\in X$ находится в этом отношении сам с собой: $x\rho x$ для всех $x\in X$:

$$\forall x:\ x\in X:\ x\rho x.$$

Отношение ρ называется **симметричным**, если из того, что $x\rho y$, следует, что $y\rho x$:

$$x\rho y\Rightarrow y\rho x.$$

Отношение ρ называется **транзитивным**, если из того, что $x\rho y$ и $y\rho z$, следует, что $x\rho z$:

$$\begin{cases} x\rho y \\ y\rho z \end{cases} \Rightarrow\ x\rho z$$

► Рефлексивность: $x\cdot x>0$ не выполняется при $x=0$, но выполняется для всех других x. Следовательно, данное отношение нерефлексивно.

► Симметричность: из $x\cdot y>0$ следует $y\cdot x>0$ на основании переместительного свойства умножения.
Пример: $1\cdot 2>0\ \Rightarrow\ 2\cdot 1>0$ - верно. Следовательно, данное отношение симметрично.

► Транзитивность: из $x\cdot y>0$ и $y\cdot z>0$ не всегда следует $x\cdot z>0$.
Пример: $(-2)\cdot(-1)>0$ и $1\cdot 2>0\ \Rightarrow\ (-2)\cdot 2>0$ - неверно;
$1\cdot 2>0$ и $2\cdot 3>0\ \Rightarrow 1\cdot 3>0$ - верно. Следовательно, данное отношение нетранзитивно.

Вывод: данное отношение на указанном множестве обладает свойством симметричности, а свойствами рефлексивности и транзитивности - нет.

► Если задано отношение на множестве $X\subseteq R$, т.е. отношение между числами, то удобно представить отношение в виде графика на координатной плоскости. Построим график данного бинарного отношения.

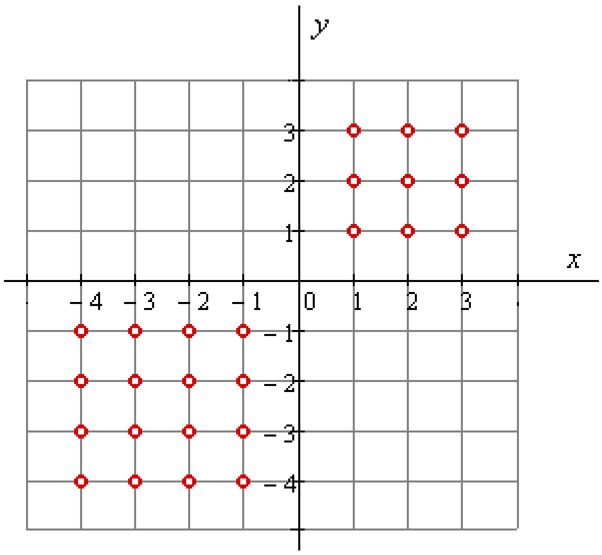

График рефлексивного отношения обязательно содержит все точки биссектрисы $y=x$.
Если отношение симметрично, то график симметричен относительно биссектрисы $y=-x$.

Литература:

1) Турецкий В.Я. "Математика и информатика", 2005, стр. 35;
2) Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. "Дискретная математика", 2007, стр. 16;
3) Новиков Ф.А. "Дискретная математика для программистов", 2008, стр. 53.