Вычислить

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$$

► Рассматривая интеграл как интеграл от дифференциального бинома, сделаем подходящую замену переменной; а затем применим тригонометрическую подстановку:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x^2-1=u^2 \\ x\,dx = u\,du \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\left(1+u^2\right)^2} = \begin{bmatrix} u = \operatorname{tg} t \\ du = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+u^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} u \end{bmatrix} = \int \cos^2 t\,dt =$$

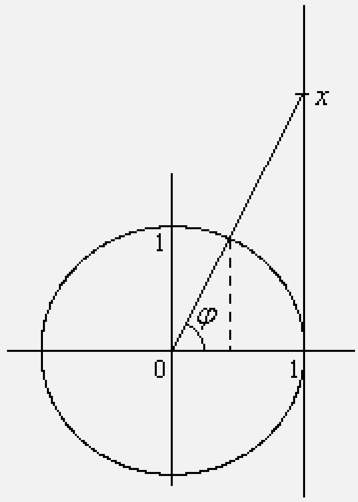
$$= \frac{1}{2}\cdot\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{2}\cdot\sin 2t\right)+C = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{4}\cdot\sin\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}+C = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}+C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}+\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

► Тригонометрические преобразования:

$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$$



$$\frac{\sin\varphi}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \frac{\cos\varphi}{1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}\cdot\frac{1}{|x|} = \frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

► Вычисление интеграла с помощью другой тригонометрической подстановки:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x=\dfrac{1}{\sin t} \\ dx=-\dfrac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} \\ t=\arcsin\dfrac{1}{x} \end{bmatrix} = -\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\dfrac{1}{\sin^3 t}\cdot\left|\dfrac{\cos t}{\sin t}\right|} = -\int \frac{\sin t\cos t\,dt}{\left|\dfrac{\cos t}{\sin t}\right|} =$$

$$= -\operatorname{sign}(\sin t)\cdot\operatorname{sign}(\cos t)\cdot\int \sin^2 t\,dt = -\operatorname{sign}(\operatorname{tg} t)\cdot\int \sin^2 t\,dt = -\frac{\operatorname{sign}(\operatorname{tg} t)}{2}\cdot\int(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{sign}(\operatorname{tg} t)}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{\operatorname{sign}(x)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{1}{x}\right)-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(x)}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot|x|}-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\arcsin\frac{1}{|x|}\right)+C$$

► Здесь

$$\sin(2\varphi)=2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sin(\arcsin x)=x$$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{x}\right)=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x\cdot|x|}$$

а также

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{1-x^2} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sign}(\operatorname{tg}(\arcsin x))=\operatorname{sign}(x)$$

► О функциях $y(x)=\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ и $y(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$

в операциях интегрирования-дифференцирования смотри файл Integraly_i_modul.pdf .

Если $x\ne 0$, то

$$x=\operatorname{sign}(x)\cdot|x|$$

$$\operatorname{sign}(x)=\frac{1}{\operatorname{sign}(x)}$$

Проверка найденной первообразной дифференцированием в Mathcad 14:

$$F(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} + \operatorname{atan}\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right) + C$$

$$\frac{d}{dx}F(x) \text{ simplify } \to \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

Результат в Maxima 5 (верный):

```
integrate(1/(x^3*sqrt(x^2-1)), x);
```

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\,x^2} - \frac{\operatorname{asin}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{2}$$

Результат в Sage 3 (конечно, идентичен результату Maxima; здесь "-1" эквивалентно "arc"):

```
show(integral(1/(x^3*sqrt(x^2-1)), x))
```

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} - \frac{\sin^{-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{2}$$

```
integral(1/(x^3*sqrt(x^2-1)), x)
    sqrt(x^2 - 1)/(2*x^2) - arcsin(1/abs(x))/2
```

Результат в Mathematica 6:

$$\int 1/\left(x^3 * \sqrt{x^2-1}\right) dx$$

$$\frac{\sqrt{-1+x^2}}{2\,x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{ArcTan}\left[\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}\right]$$

Результат в Maple 11:

$$\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Результат в Mathcad 13 (идентичен результату в Maple):

$$\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}\,dx \to \frac{1}{2\cdot x^2}\cdot\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{1}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Результат в Math Studio 5:

```
Integrate(1/(x^3*sqrt(x^2-1)))
```

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Результат в Mathcad 14 (неверный, идентичен результату в MuPAD):

$$\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}\,dx \rightarrow \frac{\mathrm{acos}\left(\frac{1}{x}\right)}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2\cdot x^2}$$

Как обычно, пропущен модуль; верный результат должен содержать модуль:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\arccos\left(\frac{1}{|x|}\right)+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)$$

Результат в MuPAD Pro 4 (неверный из-за отсутствия модуля):

```
int(1/(x^3*sqrt(x^2-1)), x)
```

$$\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2\cdot x^2}$$

Замечание:

$$\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1} = \arccos\frac{1}{|x|}$$

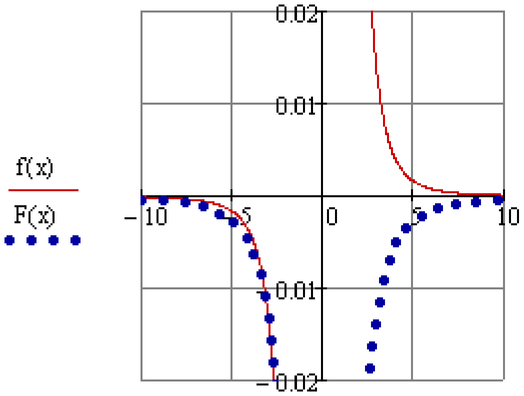
$$\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \arcsin\frac{1}{|x|}$$

$$\arccos x - \frac{\pi}{2} = -\arcsin x$$

Графическая проверка в Mathcad 14.

Оперативно убедиться в достоверности результата можно визуально, сравнив на графике ход линий подинтегральной функции $f(x)$ и найденной первообразной $F(x)$. Конечно, это проверка лишь качественная (не строгая); но если результат вычисления интеграла неверен, то это сразу бросится в глаза.

$$f(x) := \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}} \qquad F(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \mathrm{asin}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$$



Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 254, 255.