Определение. Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) \le f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) \ge f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума называется локальным максимумом, значение функции в точке минимума - локальным минимумом данной функции. Максимум и минимум функции называются её локальными экстремумами.
Термин "локальный экстремум" обусловлен тем, что введённое понятие экстремума связано с окрестностью данной точки в области определения функции, а не со всей этой областью. Функция может иметь несколько экстремумов, причём минимум в одной точке может быть больше максимума в другой.

Обычно в литературе используют термины "экстремум", "максимум", "минимум" для обозначения строгого локального экстремума, строгого локального максимума, строгого локального минимума.

Определение. Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$.
Или, точка x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$, если
$\exists \delta > 0 \quad \forall x: \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Определение. Наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке называется глобальным экстремумом. Глобальный экстремум может достигаться либо в точках локального экстремума, либо на концах отрезка.

Матрица, составленная из вторых производных функции, называется матрицей Гессе:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^T dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(гессианом условимся называть определитель матрицы Гессе; аналогично: матрица, составленная из первых производных функции, называется матрицей Якоби, а её определитель называется якобианом.

Литература:
1) Малугин В.А. "Математический анализ, курс лекций (математика для экономистов)", 2005, стр. 105 (понятие экстремума функции);
2) Малугин В.А. "Математический анализ, задачи и упражнения (математика для экономистов)", 2006, стр. 132 (глобальный экстремум; необходимое условие экстремума, 1-е и 2-е достаточное условие экстремума);
3) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 202 (экстремум функции одной переменной);
4) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 226.

Краткое оформление решения задачи.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и некоторой её окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0, y_0) значения $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

1) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x > 0, \ y > 0$$

$$z'_x = \left(x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \right)'_x = y - \frac{50}{x^2}$$

$$z'_y = \left(x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \right)'_y = x - \frac{20}{y^2}$$

Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - \dfrac{50}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Найдена стационарная точка $P(5; 2)$. Проверим выполнение достаточных условий наличия экстремума в данной точке.

$$A = z''_{xx} = \left(y - \frac{50}{x^2} \right)'_x = \frac{100}{x^3}$$

$$B = z''_{xy} = \left(y - \frac{50}{x^2} \right)'_y = 1$$

$$C = z''_{yy} = \left(x - \frac{20}{y^2} \right)'_y = \frac{40}{y^3}$$

В точке $P(5;2)$:

$$A = 4/5 > 0$$

$$B = 1$$

$$C = 5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

- в точке $P(5;2)$ минимум, т.к. $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. Значение функции в этой точке $z(5;2) = 30$.

Ответ: функция имеет минимум $z(5;2) = 30$.

2) Найти экстремумы функции

$$z = xy^2 \cdot (1 - x - y)$$

$$z = xy^2 - x^2y^2 - xy^3$$

$$z'_x = y^2 - 2xy^2 - y^3$$

$$z'_y = 2xy - 2x^2y - 3xy^2$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 \cdot (1 - 2x - y) = 0 \\ xy \cdot (2 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ 1 - 2x - y = 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ 2 - 2x - 3y = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Заметим, что при $y = 0$ решением является множество точек с координатами $x \in R$ (в пространстве это прямая $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, параллельная оси Ox). Следовательно, среди точек с $y = 0$ стационарных точек нет. Исключая точки с $y = 0$ из рассмотрения, получаем:

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2 - 2x - 3y = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$\swarrow$ $\searrow$

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 2 - 2x - 3y \end{cases}$$

$$1 - y = 0 \qquad 1 - 2y = 0$$

$$y = 1 \qquad y = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = 1/4$$

$$P_1(0;1) \qquad P_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$$

Найдены две стационарные точки $P_1(0;1)$ и $P_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; проверим их на соответствие достаточному условию наличия экстремумов в данных точках.

$$A = z''_{xx} = -2y^2$$

$$B = z''_{xy} = 2y - 4xy - 3y^2$$

$$C = z''_{yy} = 2x - 2x^2 - 6xy$$

В точке $P_1(0;1)$:

$$A = -2 < 0,\quad B = -1,\quad C = 0,\quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Поскольку $\Delta < 0$, то в данной точке экстремума нет.

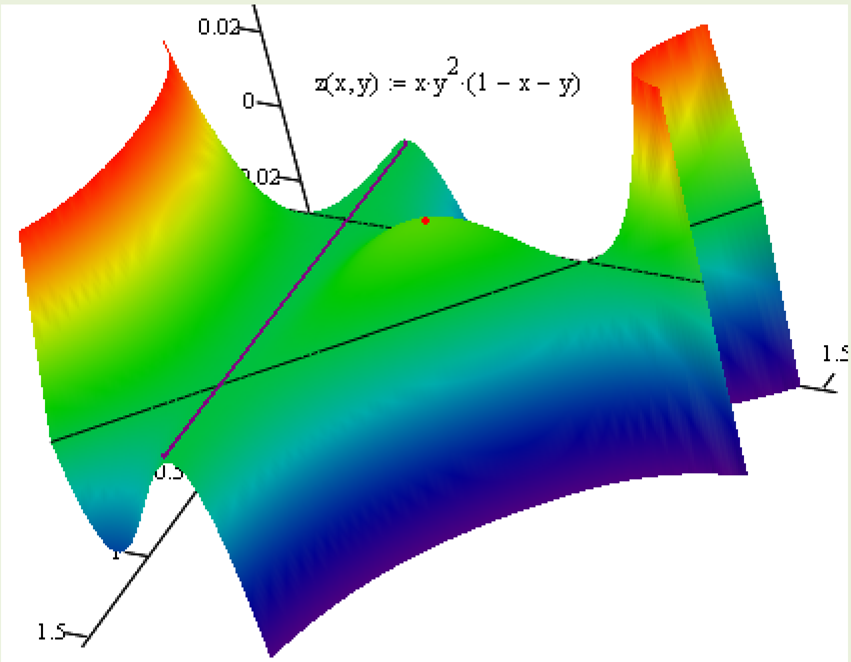
В точке $P_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$:

$$A = -1/2 < 0,\quad B = -1/4,\quad C = -3/8,\quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -3/8 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} > 0$$

Поскольку $\begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, то в данной точке функция имеет максимум $z\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$.

Ответ: функция имеет максимум $z\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$.

Сделаем иллюстрацию в Mathcad 14:



- найденный максимум отмечен красной точкой; прямая $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ выделена бордовым цветом; пересечение чёрных прямых происходит в точке $P_1(0;1)$.

3) Исследовать функцию на экстремум $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

$$z'_x = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$z'_y = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)'_y = 6xy - 12$$

Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

- окружность в пересечении с гиперболой даст четыре точки:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Найдены четыре стационарных точки $P_1(-2;-1)$, $P_2(-1;-2)$, $P_3(1;2)$, $P_4(2;1)$. Проверим выполнение достаточных условий наличия экстремума в данных точках.

$$A = z''_{xx} = \left(3x^2 + 3y^2 - 15\right)'_x = 6x$$

$$B = z''_{xy} = \left(3x^2 + 3y^2 - 15\right)'_y = 6y$$

$$C = z''_{yy} = \left(6xy - 12\right)'_y = 6x$$

► В точке $P_1(-2;-1)$:

$A = -12 < 0$

$B = -6$

$C = -12$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$$

- в точке $P_1(-2;-1)$ максимум, т.к. $\begin{cases} A<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$. Значение функции в этой точке $z(-2;-1)=28$.

► В точке $P_2(-1;-2)$:

$A=-6<0$

$B=-12$

$C=-6$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix}=36-144=-108<0$$

- в точке $P_2(-1;-2)$ нет экстремума, т.к. $\Delta<0$.

► В точке $P_3(1;2)$:

$A=6>0$

$B=12$

$C=6$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}=36-144=-108<0$$

- в точке $P_3(1;2)$ нет экстремума, т.к. $\Delta<0$.

► В точке $P_4(2;1)$:

$A=12>0$

$B=6$

$C=12$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}=144-36=108>0$$

- в точке $P_4(2;1)$ минимум, т.к. $\begin{cases} A>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$. Значение функции в этой точке $z(2;1)=-28$.

Ответ: функция имеет минимум $z(2;1)=-28$ и максимум $z(-2;-1)=28$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 320...323 (экстремум функции двух переменных).

Решение задачи с использованием матрицы Гессе.

4) Найти экстремумы функции двух переменных $z(x,y)=3x^2+2y^3-6xy-12x$

Определим стационарные точки из условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

(необходимое условие существования экстремума)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(3x^2+2y^3-6xy-12x\right)'_x=6x-6y-12$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3x^2+2y^3-6xy-12x\right)'_y=6y^2-6x$$

$$\begin{cases}6x-6y-12=0\\6y^2-6x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y=2\\y^2=x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=1\\y_1=-1\end{cases}\\\begin{cases}x_2=4\\y_2=2\end{cases}\end{array}\right.$$

Точки $P_1(1;-1)$ и $P_2(4;2)$ - стационарные точки; проверим их на соответствие достаточному условию наличия экстремума. Для этого из вторых производных функции составим матрицу Гессе:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad H=\begin{pmatrix}6 & -6\\-6 & 12y\end{pmatrix}$$

► Продолжение решения через анализ угловых миноров матрицы Гессе [1]

Рассмотрим поведение матрицы Гессе в найденных стационарных точках.

$P_1(1;-1)$: $\quad H(P_1)=\begin{pmatrix}6 & -6\\-6 & -12\end{pmatrix}$;

угловые миноры: $M_1=6>0$,

$M_2=6\cdot(-12)-(-6)\cdot(-6)=-108<0$.

Поскольку $M_2<0$, то в точке P_1 экстремума нет.

$P_2(4;2)$: $\quad H(P_2)=\begin{pmatrix}6 & -6\\-6 & 24\end{pmatrix}$;

угловые миноры: $M_1=6>0$,

$M_2=6\cdot 24-(-6)\cdot(-6)=108>0$.

Поскольку $\begin{cases}M_1>0\\M_2>0\end{cases}$, то в точке P_2 функция имеет локальный минимум $z(4;2)=-32$.

Теорема (достаточные условия экстремума). Если в некоторой точке выполнены необходимые условия экстремума и все частные производные 2-го порядка непрерывны, то существование экстремума в этой точке определяется значениями угловых миноров матрицы вторых производных (матрицы Гессе):

$M_1 > 0$, $M_2 > 0$ - локальный минимум;

$M_1 < 0$, $M_2 > 0$ - локальный максимум;

$M_2 < 0$ - экстремума нет.

Если $M_1 = 0$ или $M_2 = 0$ экстремум в исследуемой точке может быть, может не быть - необходимы дополнительные исследования.

При исследовании на локальный экстремум функции трёх переменных $u = u(x, y, z)$ рассматривается матрица

$$\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix}$$

и изучаются её угловые миноры.

Литература:

1) Малугин В.А. "Линейная алгебра. Задачи и упражнения", 2006, стр. 149 (локальный экстремум функции);
2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 320...323 (экстремум функции двух переменных);
3) Пяткова В.Б., Рузаков В.Я., Турова О.Е. "Математика, 3-й семестр", методичка УрГГУ (горный институт, Екатеринбург), 2005, стр. 23 (схема исследования функции двух переменных на экстремумы).

► Продолжение решения через анализ собственных значений матрицы Гессе [3]

Найдём собственные значения матрицы Гессе в каждой стационарной точке.

$$P_1(1;-1): \qquad H(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Из уравнения $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 \\ -6 & -12-\lambda \end{vmatrix} = 0$ находим $\lambda_{1,2} = -3 \pm 3\sqrt{13}$. Поскольку собственные значения матрицы Гессе разных знаков, то в точке P_1 экстремума нет.

$$P_2(4;2): \qquad H(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$$

Из уравнения $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 \\ -6 & 24-\lambda \end{vmatrix} = 0$ находим $\lambda_{1,2} = 15 \pm 3\sqrt{13}$. Поскольку все собственные значения матрицы Гессе положительные, то в точке P_2 локальный минимум $z(4;2) = -32$.

Находим собственные значения матрицы Гессе в каждой из стационарных точек x^* функции.

Если все собственные значения

- ► положительные: $\lambda_i > 0, \;\; i = 1, \ldots, n$, то в точке x^* локальный минимум;
- ► отрицательные: $\lambda_i < 0, \;\; i = 1, \ldots, n$, то в точке x^* локальный максимум;
- ► неотрицательные: $\lambda_i \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, n$, то в точке x^* может быть локальный минимум;
- ► неположительные: $\lambda_i \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, n$, то в точке x^* может быть локальный максимум;
- ► разных знаков, то в точке x^* нет экстремума;
- ► нулевые: $\lambda_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n$, то требуется дополнительное исследование.

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 530, стр. 531 (пример 9.8).

5) Найти точки экстремума функции

$$z=\frac{x^2}{41}+40xy^2+xy+1.$$

► Определим стационарные точки функции двух переменных $z(x,y)$ из условия

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$$

(необходимое условие существования экстремума)

$$z'_x=\frac{2}{41}x+40y^2+y$$

$$z'_y=80xy+x$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{41}x+40y^2+y=0 \\ 80xy+x=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-1/40 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3=41/320 \\ y_3=-1/80 \end{cases} \end{array}\right.$$

Найдены три стационарные точки $P_1(0;0)$, $P_2(0;-1/40)$, $P_3(41/320;-1/80)$; проверим их на соответствие достаточному условию наличия экстремума.

При исследовании на локальный экстремум функции двух переменных $z=z(x,y)$ составляется матрица квадратичной формы функции относительно дифференциалов dx, dy - матрица Гессе

$$\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

и рассматривается в каждой стационарной точке P_i.

► Если эта квадратичная форма окажется определённой, то функция $z=z(x,y)$ в точке P_i имеет экстремум:

а) минимум, если квадратичная форма положительно определённая;

б) максимум, если квадратичная форма отрицательно определённая.

► Если же квадратичная форма окажется неопределённой, то в точке P_i экстремума нет.

► В случаях неотрицательной определённости или неположительной определённости квадратичной формы требуется дополнительное исследование - экстремум может быть.

► Матрица Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{41}x + 40y^2 + y \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{41} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 80y + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 80xy + x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 80x$$

(Заметим, что $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 80y + 1$).

Итак,

$$H = \begin{pmatrix} 2/41 & 80y+1 \\ 80y+1 & 80x \end{pmatrix}$$

► Установим знакоопределённость квадратичной формы, используя критерий Сильвестра [1].

► Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определённой, <u>необходимо и достаточно</u>, чтобы все угловые миноры её матрицы A были положительными.

► Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была отрицательно определённой, <u>необходимо и достаточно</u>, чтобы знаки угловых миноров матрицы A квадратичной формы чередовались, начиная со знака минус.

► Для неопределённости (знакопеременности) квадратичной формы <u>достаточно</u>, чтобы хотя бы один главный минор чётного порядка был отрицателен, либо два главных минора нечётного порядка имели бы разные знаки (достаточный признак неопределённости квадратичной формы).

► В стационарной точке $P_1(0;0)$:

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 2/41 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

угловые миноры: $M_1 = 2/41 > 0$,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2/41 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0,$$

- квадратичная форма знаконеопределённая, следовательно, в точке P_1 экстремума нет.

► В стационарной точке $P_2(0;-1/40)$:

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 2/41 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

угловые миноры: $M_1 = 2/41 > 0$,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2/41 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0,$$

- квадратичная форма знаконеопределённая, следовательно, в точке P_2 экстремума нет.

► В стационарной точке $P_3\left(41/320;-1/80\right)$:

$$H\left(P_3\right)=\begin{pmatrix} 2/41 & 0 \\ 0 & 41/4 \end{pmatrix}$$

угловые миноры: $M_1=2/41>0$,

$$M_2=\begin{vmatrix} 2/41 & 0 \\ 0 & 41/4 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}>0,$$

- квадратичная форма положительно определённая, следовательно, в точке P_3 функция имеет локальный минимум $z\left(41/320\,;-1/80\right)=\dfrac{102359}{102400}\approx 0{,}9996$.

Ответ: функция имеет локальный минимум $z\left(\dfrac{41}{320};-\dfrac{1}{80}\right)=\dfrac{102359}{102400}$.

Найдём минимум функции в Mathematica 7 (для этого придётся указать область его дислокации):

```
Minimize[{x^2/41+40 x*y^2+x*y+1, 0<x<1, -1<y<0}, {x, y}]
```

$$\left\{\frac{102\,359}{102\,400},\ \left\{x\to\frac{41}{320},\ y\to-\frac{1}{80}\right\}\right\}$$

Литература:

1) Аксёнов А.П. "Математика. Математический анализ", часть 2, 2005, стр. 193 (примеры 13, 14);
2) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 530, стр. 531 (пример 9.8);
3) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии", 2007, стр. 135.
4) Малугин В.А. "Линейная алгебра. Курс лекций", 2006, стр. 157, 164;
5) Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. "Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчёты", 2008, стр. 301 (пример 10.35).

6) Исследовать функцию $F\left(x,y,z\right)=4x^2+3y^2+z^2-2xy+xz$ на наличие безусловных экстремумов с использованием производных первого и второго порядков, проведя анализ стационарных точек.

► Определим стационарные точки функции трёх переменных $F\left(x,y,z\right)$ из условия

$$\begin{cases} F'_x=0 \\ F'_y=0 \\ F'_z=0 \end{cases}$$

(необходимое условие существования экстремума)

$$F'_x=8x-2y+z$$

$$F'_y=6y-2x$$

$$F'_z=2z+x$$

$$\begin{cases} 8x-2y+z=0 \\ 6y-2x=0 \\ 2z+x=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Точка $P\left(0;0;0\right)$ - стационарная точка; проверим её на соответствие достаточному условию наличия экстремума.

При исследовании на локальный экстремум функции трёх переменных $u=u(x,y,z)$ составляется матрица квадратичной формы функции относительно дифференциалов dx, dy, dz - матрица Гессе

$$\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix}$$

и рассматривается в каждой стационарной точке P_i.

► Если эта квадратичная форма окажется определённой, то функция $z=z(x,y)$ в точке P_i имеет экстремум:

а) минимум, если квадратичная форма положительно определённая;
б) максимум, если квадратичная форма отрицательно определённая.

► Если же квадратичная форма окажется неопределённой, то в точке P_i экстремума нет.

► В случаях неотрицательной определённости или неположительной определённости квадратичной формы требуется дополнительное исследование - экстремум может быть.

► Запишем матрицу Гессе:

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x-2y+z \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=8 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6y-2x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=6 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z+x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=2$$

(Заметим, что $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=-2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}=1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}=0$).

Итак,

$$H=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Анализ знакоопределённости квадратичной формы.
► Критерий Сильвестра.

► Установим знакоопределённость квадратичной формы, используя критерий Сильвестра [1].

► Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры её матрицы A были положительными.

► Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы A квадратичной формы чередовались, начиная со знака минус.

► Для неопределённости (знакопеременности) квадратичной формы достаточно, чтобы хотя бы один главный минор чётного порядка был отрицателен, либо два главных минора нечётного порядка имели бы разные знаки (достаточный признак неопределённости квадратичной формы).

► В случае, если один или более угловых миноров равны нулю, но могло выполниться одно из условий знакоопределённости, - квадратичная форма неотрицательно определённая или неположительно определённая (*это условие записал для завершённости картины; требует доказательства*).

В найденной стационарной точке:

$$P(0;0;0):\qquad H(P)=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

угловые миноры: $M_1 = 8 > 0$,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8\cdot 6-(-2)\cdot(-2)=44>0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(0-6)+2\cdot(48-4)=82>0$$

Поскольку $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 > 0 \\ M_3 > 0 \end{cases}$, то в точке P функция имеет локальный минимум $F(0;0;0)=0$.

► Собственные значения матрицы Гессе.

► Установим знакоопределённость квадратичной формы, анализируя собственные значения матрицы Гессе [2].

Находим собственные значения матрицы Гессе в каждой из стационарных точек x^* функции.

Если все собственные значения

► положительные: $\lambda_i > 0,\ \ i=1,\ldots,n$, то квадратичная форма положительно определённая;

► отрицательные: $\lambda_i < 0,\ \ i=1,\ldots,n$, то квадратичная форма отрицательно определённая;

► неотрицательные: $\lambda_i \ge 0,\ \ i=1,\ldots,n$, то квадратичная форма неотрицательно определённая;

► неположительные: $\lambda_i \le 0,\ \ i=1,\ldots,n$, то квадратичная форма неположительно определённая;

► разных знаков, то квадратичная форма неопределённая;

► нулевые: $\lambda_i = 0,\ \ i=1,\ldots,n$, то квадратичная форма неотрицательно определённая или неположительно определённая [2, стр. 530].

Найдём собственные значения матрицы Гессе в найденной стационарной точке.

$$P(0;0;0):\qquad H(P)=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Из уравнения $\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

или

$$\lambda^3 - 16\lambda^2 + 71\lambda - 82 = 0$$

находим $\lambda_1 \approx 1{,}809$

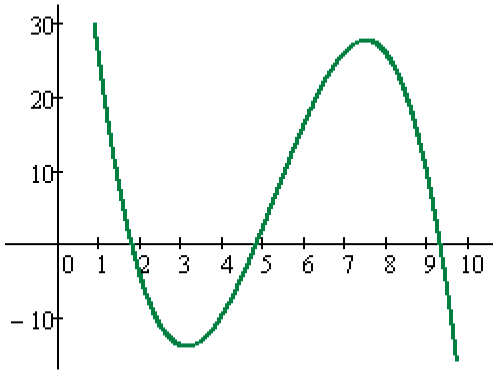
$\lambda_2 \approx 4{,}855$

$\lambda_3 \approx 9{,}336$

как корни полинома в Mathcad:

$$V := (82 \quad -71 \quad 16 \quad -1)^T \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} 1.809 \\ 4.855 \\ 9.336 \end{pmatrix}$$

или графически в Mathcad:



Поскольку все собственные значения матрицы Гессе положительные, то в точке P минимум.

► Второй дифференциал функции.

► Установим знакоопределённость квадратичной формы непосредственным образом. Квадратичная форма относительно дифференциалов - это второй дифференциал функции. Преобразуем выражение второго дифференциала функции так, чтобы явным образом установить факт его знакоопределённости [4, 5].

Этот подход к исследованию знакоопределённости квадратичной формы можно использовать как способ дополнительного исследования, когда критерий Сильвестра или анализ собственных значений матрицы квадратичной формы не дают результата.

Достаточные условия экстремума функции n переменных.

Если $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ - стационарная точка дважды дифференцируемой функции $f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ и если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал

$$d^2 f\left(M_0\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(M_0\right) dx_i dx_j$$

сохраняет знак при любых значениях dx_i и dx_j, не равных нулю одновременно, то функция в точке M_0 имеет экстремум:

минимум при $d^2 f\left(M_0\right) > 0$;

максимум при $d^2 f\left(M_0\right) < 0$ [5].

Второй дифференциал функции $\Phi(x,y)$ равен

$$d^2\Phi(x,y)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy$$

или, в случае функции трёх переменных $\Phi(x,y,z)$,

$$d^2\Phi(x,y,z)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}dydz$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x-2y+z \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=8 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=-2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}=1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6y-2x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=6 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z+x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=2$$

и запишем второй дифференциал функции в точке $P(0;0;0)$:

$$d^2F=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2F=$$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dy\,dz+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dx\,dz=$$

$$=8\cdot(dx)^2+6\cdot(dy)^2+2\cdot(dz)^2+2\cdot(-2)\cdot dx\,dy+2\cdot 0\cdot dy\,dz+2\cdot 1\cdot dx\,dz=$$

$$=8(dx)^2+6(dy)^2+2(dz)^2-4dx\,dy+2dx\,dz$$

Выделим полные квадраты; для краткости записи переобозначим dx как x и т.д.:

$$8x^2+6y^2+2z^2-4xy+2xz=$$

$$=2\left(z+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{2}+8x^2+6y^2-4xy=$$

$$=2\left(z+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{15}{2}x^2+6y^2-4xy=$$

$$=2\left(z+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\left(x^2+\frac{4}{5}y^2-\frac{8}{15}xy\right)=$$

$$=2\left(z+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\left(x^2-2x\cdot\frac{4y}{15}+\left(\frac{4y}{15}\right)^2+\frac{164}{225}y^2\right)=$$

$$=2\left(z+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\left(x-\frac{4}{15}y\right)^2+\frac{82}{15}y^2$$

т.е. в точке $P(0;0;0)$:

$$d^2F=2\left(\frac{1}{2}dx+dz\right)^2+\frac{15}{2}\left(dx-\frac{4}{15}dy\right)^2+\frac{82}{15}(dy)^2>0$$

(при не равных нулю dx, dy, dz одновременно)

- следовательно, точка $P(0;0;0)$ является точкой минимума.

Литература:

1) Аксёнов А.П. "Математика. Математический анализ", часть 2, 2005, стр. 193 (примеры 13, 14);

2) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 530, стр. 531 (пример 9.8);

3) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии", 2007, стр. 135.

4) Малугин В.А. "Линейная алгебра. Курс лекций", 2006, стр. 157, 164;

5) Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. "Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчёты", 2008, стр. 301 (пример 10.35).

Проверим наличие этого минимума в Mathematica 7:

```
Minimize[4 x^2 + 3 y^2 + z^2 - 2 x*y + x*z, {x, y, z}]

{0, {x → 0, y → 0, z → 0}}
```