1) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$S: \quad 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9$$

в точке $M_0(1;-2;1)$.

Поверхность называют регулярной, если у каждой точки этой поверхности есть окрестность, допускающая регулярную параметризацию, т.е. параметризацию вида

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{r}\left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right), \quad (u,v) \in D,$$

где функции

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in D$$

k раз непрерывно дифференцируемы в области D.

Точку регулярной поверхности называют обыкновенной (неособой), если существует такая регулярная параметризация некоторой её окрестности, что в этой точке ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

равен двум. В противном случае точку называют особой.

Пусть регулярная без особых точек поверхность задана неявным уравнением $F(x,y,z) = 0$ и

$$F'_x = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad F'_y = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}, \quad F'_z = \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}$$ - частные производные в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Уравнение касательной плоскости, проходящей через точку M_0:

$$F'_x \cdot (x - x_0) + F'_y \cdot (y - y_0) + F'_z \cdot (z - z_0) = 0$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$$

$$F(x,y,z) = 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9\right)'_x = 4y - z \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} = 4 \cdot (-2) - 1 = -9$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9\right)'_y = 8y + 4x \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} = 8 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -12$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9\right)'_z = -2z - x + 3 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} = -2 \cdot 1 - 1 + 3 = 0$$

► Уравнение касательной плоскости.

$$F'_x \cdot (x - x_0) + F'_y \cdot (y - y_0) + F'_z \cdot (z - z_0) = 0$$

$$-9 \cdot (x - 1) - 12 \cdot \left(y - (-2)\right) + 0 \cdot (z - 1) = 0$$

$$-9 \cdot (x - 1) - 12 \cdot (y + 2) = 0$$

$$3x + 4y + 5 = 0$$

- общее уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0.

► Уравнение нормали.

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

$$\frac{x-1}{-9}=\frac{y-(-2)}{-12}=\frac{z-1}{0}$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$$

- каноническое уравнение нормали к поверхности в точке M_0 (прямая находится в плоскости $z=1$).

Литература:

1) Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. "Геометрия", 2003, стр. 303 (касательная плоскость и нормаль к поверхности).

2) Для данной поверхности $z=\sin(xy)$ составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M\left(1;\frac{\pi}{3};?\right)$.

Уравнение касательной плоскости, проходящей через точку M_0:

$$F'_x\cdot(x-x_0)+F'_y\cdot(y-y_0)+F'_z\cdot(z-z_0)=0$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

где $F'_x=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}$, $F'_y=\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}$, $F'_z=\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}$ - частные производные в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Вычисляем

$$F(x,y,z)=\sin(xy)-z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\sin(xy)-z\right)'_x=y\cdot\cos(xy) \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(\sin(xy)-z\right)'_y=x\cdot\cos(xy) \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\left(\sin(xy)-z\right)'_z=-1 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-1$$

$$z\left(1;\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

► Уравнение касательной плоскости.

$$F'_x\cdot(x-x_0)+F'_y\cdot(y-y_0)+F'_z\cdot(z-z_0)=0$$

$$\frac{\pi}{6}\cdot(x-1)-\frac{1}{2}\cdot\left(y-\frac{\pi}{3}\right)-1\cdot\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{6}-\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}-z+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\frac{\pi x}{6}-\frac{y}{2}-z+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\pi x-3y-6z+3\sqrt{3}=0$$

- общее уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0.

► Уравнение нормали.

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

$$\frac{x-1}{\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{y-\frac{\pi}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}$$

$$\frac{x-1}{\pi}=\frac{y-\frac{\pi}{3}}{3}=\frac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6}$$

- каноническое уравнение нормали к поверхности в точке M_0.

Литература:

1) Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. "Геометрия", 2003, стр. 303 (касательная плоскость и нормаль к поверхности).

3) Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности

$$z=f(x,y)=1+x^2+y^2$$

в точке $M_0=(1;1;3)$.

Сделать схематический рисунок.

▼

Уравнение касательной плоскости

$$z-z_M=z'_x(x_M,y_M)\cdot(x-x_M)+z'_y(x_M,y_M)\cdot(y-y_M)$$

Уравнение нормали

$$\frac{x-x_M}{z'_x(x_M,y_M)}=\frac{y-y_M}{z'_y(x_M,y_M)}=\frac{z-z_M}{-1}$$

Вычисляем

$$z'_x=\left(1+x^2+y^2\right)'_x=2x$$

$$z'_y=\left(1+x^2+y^2\right)'_y=2y$$

$$z'_x(x_M,y_M)=z'_x(1;1)=2\cdot 1=2$$

$$z'_y(x_M,y_M)=z'_y(1;1)=2\cdot 1=2$$

$$z_M=z(1;1)=1+1^2+1^2=3$$

Следовательно общее уравнение касательной плоскости

$$z - z_M = z'_x(x_M, y_M)\cdot(x - x_M) + z'_y(x_M, y_M)\cdot(y - y_M)$$

$$z - 3 = 2\cdot(x-1) + 2\cdot(y-1)$$

$$2x + 2y - z - 1 = 0$$

- касательная плоскость к поверхности $f(x, y)$ в точке M_0.

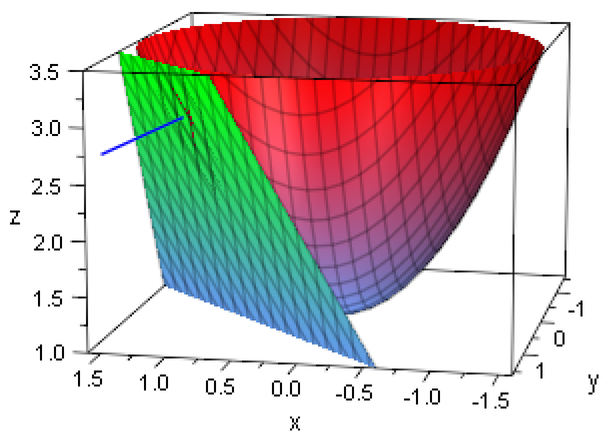
и каноническое уравнение нормали

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

- нормаль к поверхности $f(x, y)$ в точке M_0.

Сделаем иллюстрацию к задаче в MuPAD Pro 4:

```
plotfunc3d(1+x^2+y^2, 2*x+2*y-1, x=-1.6..1.6, y=-1.6..1.6,ZRange = 1..3.5,
           plot::Line3d([1, 1, 3], [3/2, 3/2, 11/4]))
```



Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 319.