

1. Существует ли граф, степени вершин которого равны...
 - (a) ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
 - (b) ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6?
 - (c) ... 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6?
 - (d) ... 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5?
2. В графе все вершины имеют степень 7. Может ли в этом графе быть ровно...
 - (a) ... 100 рёбер?
 - (b) ... 105 рёбер?

!! Лемма о рукопожатиях. В любом графе нечётных вершин — чётное число.

3. В некоторой стране из столицы выходит 2017 дорог, из города Обзора — одна, а из всех остальных городов — по 50. Докажите, что из Обзора можно добраться до столицы.
4. В некотором городе есть площади и тупики. С каждой площади отходит 5 улиц; из каждого тупика — одна. Всего в городе 49 улиц. Какое наименьшее число тупиков может быть?
5. При каких $n, k \in \mathbb{N}$ существует регулярный граф степени k на n вершинах?
6. Связный граф G нарисован на плоскости. Пусть у него V вершин, E рёбер, F граней. Рассмотрим величину $V - E + F$, обозначим её χ .
 - (a) Нарисуйте несколько графов и посчитайте для них величину χ .
 - (b) Докажите, что χ будет такая же для любого связного графа на плоскости.

!! Эйлерова характеристика. Для любого связного графа на плоскости справедливо $V - E + F = 2$.

7. Пять точек требуется соединить каждую с каждой непересекающимися линиями (не обязательно прямыми). (Этот граф называется K_5 .)
 - (a) Предположим, что это получилось сделать на поверхности шара.
 - i. Каким должно быть число граней?
 - ii. Заметьте, что каждая грань ограничена тремя или более рёбрами.
 - iii. Выведите, что $3F \leq 2E$ и получите противоречие.
 - (b) Вспомните, что это можно сделать на поверхности бублика.
8. Три дома требуется соединить с тремя колодцами (каждый с каждым) непересекающимися дорожками. (Этот граф называется $K_{3,3}$.)
 - (a) Предположим, что это получилось сделать на поверхности шара.
 - i. Каким должно быть число граней?
 - ii. Докажите, что нет треугольных граней.
 - iii. Выведите, что $4F \leq 2E$ и получите противоречие.
 - (b) Докажите, что это можно сделать на поверхности бублика.