Делимость и остатки

группа «Бобице♡»

1. Докажите:
   а) $a \equiv a \pmod m$.
   б) Если $x \equiv y \pmod m$, а $s \equiv t \pmod m$, то $x + s \equiv y + t \pmod m$
   в) Если $a \equiv b \pmod m$, а $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.
   г) Если $x \equiv y \pmod m$, а $s \equiv t \pmod m$, то $x \cdot s \equiv y \cdot t \pmod m$
   д) Если $a \equiv b \pmod m$, то $a \cdot h \equiv b \cdot h \pmod m$, где $h \in \mathbb{Z}$
   Верно ли обратное? Ответ обоснуйте.
   е) Если $a \equiv b \pmod m$, то $a^n \equiv b^n \pmod m$, где $n \in \mathbb{N}$.

   Утверждение. Любое натуральное число в десятичной записи дает такой же остаток при делении:
   - на 2 и 5, как и его последняя цифра;
   - на 2^n и 5^n, как и число, образованное последними n его цифрами;
   - на 3 и 9, как и его сумма цифр.

2. Найдите остатки от деления:
   а) 6^{100} на 7;
   б) 5^{102} на 103;
   в) 3^{104} на 103;
   г) $4^{18} + 5^{17}$ на 3.
   д) $13^{16} - 2^{55} \cdot 5^{15}$ на 3.

---

3. Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

4. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{337} - 1$. Не опечатка ли это?

5. Найти все пятизначные числа вида $\overline{31X7Y}$, которые без остатка делятся на 15.

6. Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

7. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

8. На доске было написано число из нескольких семёрок: $777\ldots77$. Влад стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию, и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.