7 класс

Задача 7.1. У Джерри есть девять карточек с цифрами от 1 до 9. Он выкладывает их в ряд, образуя девятизначное число. Том выписывает на доску все 8 двузначных чисел, образованных соседними цифрами (например, для числа 789456123 это числа 78, 89, 94, 45, 56, 61, 12, 23). За каждое двузначное число, делящееся на 9, Том отдает Джерри кусочек сыра. Какое наибольшее количество кусочков сыра может получить Джерри?

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что из двузначных чисел на 9 делятся только 18, 27, 36, 45, и числа, получающиеся из них перестановкой цифр (также есть 90 и 99, но у нас нет в распоряжении цифры 0 и только одна цифра 9). Таким образом, только четыре пары цифр из имеющихся могут образовать число, делящееся на 9. Чтобы получить пример, надо все эти пары собрать в любом порядке:

$$182736459.$$

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Доказано, что 5 двузначных чисел, делящихся на 9, получить нельзя.

3 б. Приведен пример с 4 двузначными числами, делящимися на 9.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 7.2. Решите ребус

$$ABCDEF \cdot 3 = BCDEFA.$$

Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: $142857 \cdot 3 = 428571$ и $285714 \cdot 3 = 857142$.

Решение. Обозначим пятизначное число $BCDEF$ через x. Тогда этот ребус можно переписать в виде соотношения $(100000 \cdot A + x) \cdot 3 = 10x + A$, которое равносильно уравнению $29999 \cdot A = 7x$, или $42857 \cdot A = x$.

Заметим, что цифры $A \geqslant 3$ не подходят, так как число $42857 \cdot A$ будет шестизначным, каким не может являться число x.

При $A = 1$ получаем, что $42857 = BCDEF$, т. е. $B = 4$, $C = 2$, $D = 8$, $E = 5$, $F = 7$.

При $A = 2$ получаем, что $2 \cdot 42857 = 85714 = BCDEF$, т. е. $B = 8$, $C = 5$, $D = 7$, $E = 1$, $F = 4$.

Оба этих варианта подходят. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Составлено уравнение вида $(100000 \cdot A + x) \cdot 3 = 10x + A$ или эквивалентное ему.

5 б. Составлено такое уравнение, и верно найдено одно из решений.

В отсутствие указанных выше продвижений следующие критерии *суммируются:*

1 б. Есть верный ответ.

2 б. Доказано, что $A = 1$ или $A = 2$.

Если доказано только, что $A \leqslant 3$, то ставится 1 балл вместо 2.

Задача 7.3. У скупого рыцаря есть 5 сундуков с золотом: в первом сундуке 1001 золотая монета, во втором — 2002, в третьем — 3003, в четвертом — 4004, в пятом — 5005. Каждый день скупой рыцарь выбирает 4 сундука, забирает из них по 1 монете и перекладывает в оставшийся сундук. Спустя какое-то время в первом сундуке не осталось монет, а еще в одном сундуке было ровно 2019 монет. В каком?

Ответ: в пятом.

Решение. Посмотрим на остатки от деления на 5 количеств монет в сундуках. Каждый день в каждом сундуке количество монет либо уменьшается на 1, либо увеличивается на 4, а значит остаток от деления на 5 всегда уменьшается на 1 (если он был 0, то станет равным 4). Поскольку спустя некоторое время в первом сундуке не осталось монет, количество дней, которое прошло, равно $5k + 1$ для некоторого натурального k, и в каждом сундуке остаток уменьшился на 1. Поскольку 2019 дает остаток 4 при делении на 5, то такое количество монет могло остаться только в пятом сундуке. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Присутствует идея рассмотреть остатки при делении на 5.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 7.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle AYB = \angle AXC = 134°$. На луче YB за точку B отметили точку M, а на луче XC за точку C отметили точку N. Оказалось, что $MB = AC$, $AB = CN$. Найдите $\angle MAN$.

Ответ: 46°.

Решение. Заметим, что $\angle ACN = \angle CAX + \angle AXC = \angle BAY + \angle AYB = \angle ABM$. Добавляя

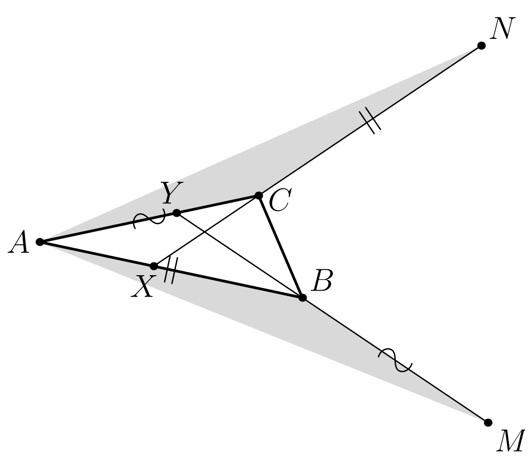

Рис. 1: к решению задачи **??**

к полученному равенству углов равенства отрезков $AC = BM$ и $AB = CN$, заключаем, что по первому признаку треугольники ACN и MBA равны (рис. **??**), а значит, $\angle NAC = \angle AMB$. Тогда верна цепочка равенств $\angle MAN = \angle NAC + \angle CAB + \angle BAM = \angle AMB + \angle YAB + \angle BAM = \angle YAM + \angle AMY = 180° - \angle AYB = 180° - 134° = 46°$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

5 б. Верное в остальном решение с неправильным ответом, полученным в результате арифметической ошибки.

3 б. Доказано, что треугольники ACN и MBA равны.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 7.5. Хромая ладья совершает ходы то на одну клетку, то на две, обязательно чередуя расстояние; направление хода при этом можно выбирать произвольно (в любую из четырех сторон). Какое максимальное количество клеток доски 6×6 она сможет посетить, если посещать одну и ту же клетку дважды запрещено, но можно самим выбрать клетку старта и первый ход?

Ответ: 34.

Решение. Пример для 34 клеток приведен на рис. **??**. Посещенные клетки пронумерованы числами от 1 до 34.

5	2	4	3	13	10
6	1	7	8	14	9
28	31		34	12	11
27	32		33	15	16
29	30	20	19	21	18
26	25	23	24	22	17

Рис. 2: к решению задачи **??**

Покажем, что 35 и более клеток посетить не удастся. Для этого разобьем квадрат 6×6 на девять квадратов 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке (рис. **??**). Образует-

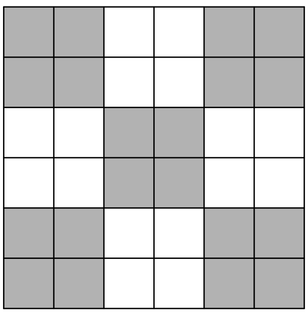

Рис. 3: к решению задачи **??**

ся 20 черных клеточек и 16 белых. Каждый ход длины 2 связывает две клетки разного цвета, причем для разных «длинных» ходов соответствующие пары клеток не пересекаются. Поскольку белых клеток 16, количество длинных ходов не превосходит 16. В силу чередования это гарантирует, что общее количество ходов не превосходит 33, а значит, количество посещенных клеток не превосходит 34. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Построен пример для обхода 34 клеток.

3 б. Доказано, что 35 клеток посетить не удастся.

1 б. Построен пример обхода 32 или 33 клеток.

1 б. Есть верный ответ.